§8. О нелинейных задачах

До сих пор мы имели дело либо с линейными, либо с такими нелинейными задачами, для которых были применимы схемы «бегущего счета». В ряде нелинейных задач организовать «бегущий счет» невозможно, и разностная аппроксимация уравнений на сетке приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений.

Один из подходов к реализации разностной схемы для нелинейных уравнений состоит в их линеаризации. Его основная идея была рассмотрена, применительно к краевым задачам для ОДУ, на примере задачи взаимодействия световых пучков. Она заключается в сведении нелинейной системы к серии линейных систем. В случае уравнений в частных производных принципиальных отличий, как правило, не возникает.

Поэтому мы разберем несколько иной подход, который заключается в непосредственном решении системы нелинейных уравнений при помощи итерационного алгоритма.

Пример: Стационарное обтекание

Вычислительная гидродинамика – одна из наиболее сложных, но между тем и одна из наиболее продвинутых областей математического моделирования, проводимого путём численного решения нелинейных уравнений в частных производных. Спектр практического применения подобных моделей чрезвычайно широк – от расчётов аэродинамики автомобилей и самолётов до моделирования динамики атмосферы и океана. На сегодняшний день быстродействие компьютеров и разработанные численные методы позволяют решать систему уравнений гидродинамики с учётом реальной 3D–геометрии практически любой задачи без каких-либо серьёзных ограничивающих предположений. (Разумеется, говоря это, надо помнить, что удовлетворительная теория возникновения турбулентности на сегодня отсутствует.)

Предлагаемый пример взят из книги С.Кунина [4] и связан со сравнительно простой гидродинамической задачей двумерного стационарного обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью. Физически задача соответствует воздействию на стационарный поток жидкости (со скоростью V^0) находящегося в нём протяжённого препятствия типа балки (либо, в другой постановке, протяжённого горного массива на поток атмосферного воздуха). Более подробно теория и постановка базовой задачи обтекания пластины рассмотрена в [4].

Стационарная система уравнений гидродинамики при предположении несжимаемости среды (для воды это условие выполняется для очень широкого круга явлений, а для атмосферного воздуха – в случае малости скорости потока по сравнению со скоростью звука) и пренебрежении стратификацией среды выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}\vec{V} = 0 \\ (\vec{V}\vec{\nabla})\vec{V} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \nu\vec{\nabla}^2\vec{V} \\ P = f(\rho, T) \end{gathered} \qquad (62)$$

Первое уравнение(непрерывности) выражает закон сохранения массы, второе – закон сохранения количества движения, а третье – термодинамическое уравнение состояния. Здесь V(x,z), P(x,z), ρ(x,z), T=const и ν=const – соответственно скорость движения давление, плотность, температура и вязкость среды. Систему (62) можно путём несложных преобразований привести к системе двух уравнений для функции тока ψ и завихренности ξ:

$$\begin{gathered} \nabla^2\psi = \zeta \\ \nu\nabla^2\zeta = \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{gathered} \qquad (63)$$

Как Вы видите, (63) – это система дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Пример связан с численным решением этой системы для функции тока и завихрённости. Напомним, что проекции скорости связаны с этими величинами следующим образом:

$$V_X = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad V_Z = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \text{ и } \zeta = \frac{\partial V_X}{\partial z} - \frac{\partial V_Z}{\partial x}. \tag{64}$$

Давление и плотность в такой постановке задачи также однозначно выражаются через плотность тока.

Граничные условия задачи обтекания гор заключаются в задании условия прилипания (V_X=0, V_Z=0) на нижней границе и условия невозмущенности потока на верхней границе (V_X=V^0, V_Z=0). Слева и справа принимается допущение, что за пределами моделируемой области течение не изменяется, т.е. V_X=const, V_Z=const. В задаче обтекания пластины учитывается её симметрия, и полагается, что на оси симметрии функция тока постоянна, а завихренность (также вследствие симметрии) равна нулю. Соответственно, расчеты касаются только половины расчетной области. Кроме того, отличается условие на левой границе, а именно, учитывается равенство нулю завихренности в набегающем потоке. В задаче обтекания гор, напротив, учитывается прилипание жидкости к нижней границе.

Для компьютерных расчётов наиболее простым способом производится дискретизация уравнений (63) и граничных условий. Для этого расчётная область покрывается равномерной сеткой, и уравнения (63) записываются в разностной форме, например, на шаблоне «крест» (см. рис. 12):

$$\frac{\psi_{i-1}^{j} - 2\psi_i^j + \psi_{i+1}^j}{\Delta^2} + \frac{\psi_i^{j-1} - 2\psi_i^j + \psi_i^{j+1}}{\Delta^2} = \xi_i^j \quad , \tag{65}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\xi_{i-1}^{j} - 2\xi_i^j + \xi_{i+1}^j}{\Delta^2} + \frac{\xi_i^{j-1} - 2\xi_i^j + \xi_i^{j+1}}{\Delta^2} = \\ &= \frac{V^0 \cdot \Delta}{4 \cdot \nu} \frac{(\psi_i^{j+1} - \psi_i^{j-1})(\xi_{i+1}^j - \xi_{i-1}^j) - (\psi_{i+1}^j - \psi_{i-1}^j)(\xi_i^{j+1} - \xi_i^{-1})}{\Delta^2} \quad . \end{aligned} \tag{66}$$

Неизвестные – это значения функции тока ψ_i^j и завихренности ξ_i^j во всех узлах сетки. Для того, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных, необходимо в дискретной форме записать и обсуждённые выше граничные условия. Квадратичная нелинейность определяется правой частью разностного уравнения (66). Коэффициент, входящий в (66)

$$R = \frac{V^0 \cdot \Delta}{\nu} \tag{67}$$

характеризует степень влияния вязких сил и называется *сеточным числом Рейнольдса*.

Предлагаемый численный метод реализации разностной системы (65-66) основан на ее преобразовании к виду:

$$\psi_i^j = f_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi}), \qquad \xi_i^j = g_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi}) \quad , \tag{68}$$

где $f_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi})$, $g_i^j(\vec{\psi}, \vec{\xi})$ – это некоторые функции, зависящие, согласно (65-66), от значений сеточных функций тока и завихренности во всех соседних с (i, j)-м узлах.

Исходя из представления (68), организуется итерационный процесс: сначала задаётся некоторое начальное приближение (например, распределение функций тока и завихренности в невозмущённом потоке, известное аналитически), а затем в ходе итераций значение этих функций в каждом узле уточняется.

Для пересчета «старых» ψ_i^j и ξ_i^j на «новые» ψ'^j_i и ξ'^j_i применяются простые формулы:

$$\psi'^j_i = (1-\omega)\cdot\psi_i^j + \omega\cdot f_i^j, \; \xi'^j_i = (1-\omega)\cdot\xi_i^j + \omega\cdot g_i^j, \tag{69}$$

где коэффициент $0<\omega<2$ называется *параметром релаксации*, а сам алгоритм – *итерационным методом Гаусса–Зейделя*. Применяя последовательно релаксацию к полю функций тока во всех пространственных узлах, а затем к полю завихренностей, можно ожидать, что рано или поздно итерационный процесс сойдётся к точному решению.

Приведем пример работы релаксационного метода (69). Используем значение гидродинамического числа Рейнольдса Re=1 и, ради сравнения, на разных сетках (рис. 37 и 38), т.е. при разном сеточном значении Re (67). Оба рисунка представляют контурный график поля линий уровня, во врезке которого приведен график поля завихренности. В качестве нулевой итерации, необходимой для запуска метода Гаусса-Зейделя, выбран постоянный поток жидкости. Для такого, сравнительно малого, числа Рейнольдса, итерации сходятся к ламинарному решению (63).

Рис. 37. *Решение (63) на сетке 40x20 узлов методом Гаусса-Зейделя*

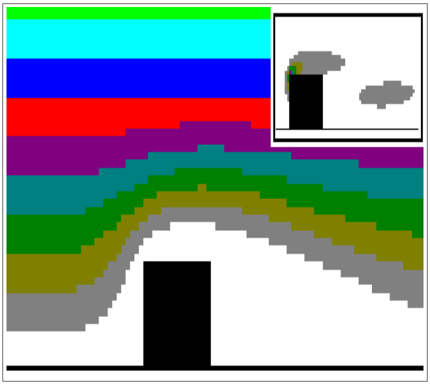

Рис. 38. *Решение (63) на сетке 100x50 узлов (тем же методом)*

Из сопоставления рис. 37 и 38 видно, что, несмотря на одинаковые гидродинамические условия задачи, решение получается несколько различным. А именно, на более подробной сетке (рис. 38) оно соответствует более возмущенному течению (вихрь, образующийся в результате обтекания пластины, отрывается от ее поверхности и образует водоворот). Собственно, дело обстоит примерно так же, как и в примере, который мы обсуждали в рамках раздела о псевдовязкости (см. §7).

Заметим, что при больших R трудно получить сходящееся решение, т.к. сильная нелинейность не позволяет использовать простой релаксационный алгоритм Гаусса-Зейделя.