Пример: волновое уравнение

Еще один пример применения схемы «крест», для которого, однако, можно организовать «бегущий счет», связан с решением *волнового уравнения*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \tag{31}$$

Одномерное волновое уравнение (31) описывает, например, свободные колебания струны музыкального инструмента. В этом случае неизвестная функция $u(x,t)$ имеет смысл смещения профиля струны относительно невозмущенного (прямолинейного) положения, а скорость волны c характеризует материал, из которого изготовлена струна.

Уравнение (31) содержит производные второго порядка, как по пространственной координате, так и по времени. Однако, постановка начальных условий (начальный профиль самой функции и ее первой производной) сильно отличает его от уравнения Пуассона, для которого также используется пятиточечная схема «крест». Если переписать волновое уравнение в виде системы двух уравнений в частных производных, введя вторую неизвестную функцию v по формуле:

$$v=u_t, \tag{32}$$

то мы сразу увидим, что для системы двух уравнений несложно организовать «бегущий счет» как по явной, так и по неявной схеме Эйлера. В таком случае нам придется аппроксимировать конечной разностью только первую производную по времени, для чего подойдет четырехточечный шаблон.

Приведем два примера расчетов нескольких первых слоев по времени для волнового уравнения с нулевыми граничными условиями и $u_x(x,0)=0$ (рис. 15 и 16). Начальный профиль $u(x,t=0)$, разный для двух рисунков, показан на каждом из них сплошной кривой. В первом случае (рис. 15) решением является стоячая волна, а во втором – бегущая волна (рис. 16).

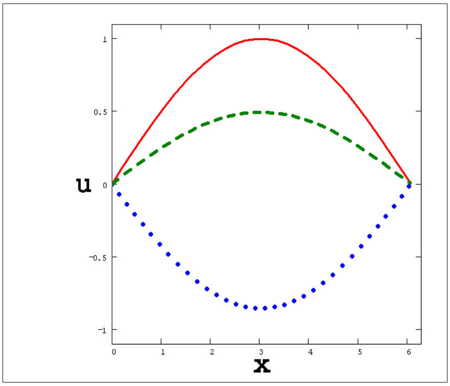

Рис. 15. *Решение волнового уравнения в виде стоячей волны*

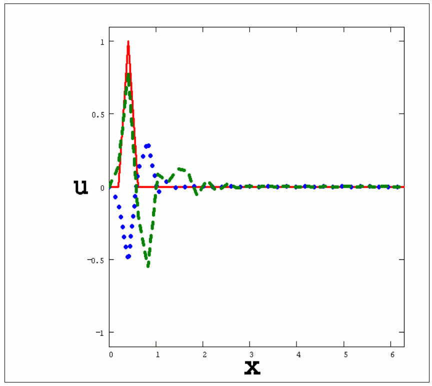

Рис. 16. *Решение волнового уравнения в виде бегущей волны*

Пример: обратное уравнение теплопроводности

Замечательными свойствами обладает так называемое обратное уравнение диффузии тепла, которое получается путем замены в исходном (прямом) уравнении переменной t на -t. Согласно постановке задачи, обратное уравнение теплопроводности описывает реконструкцию динамики профиля температуры остывающего стержня. По начальному условию в виде профиля температуры в некоторый момент времени требуется определить, как до того происходило остывание стержня. Мы ограничимся самым простым линейным уравнением с D=const без источников тепла:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \qquad (33)$$

Это – уравнение гиперболического типа и оно, несмотря на кажущуюся близость к рассмотренным вариантам уравнения теплопроводности, оно обладает замечательными свойствами.

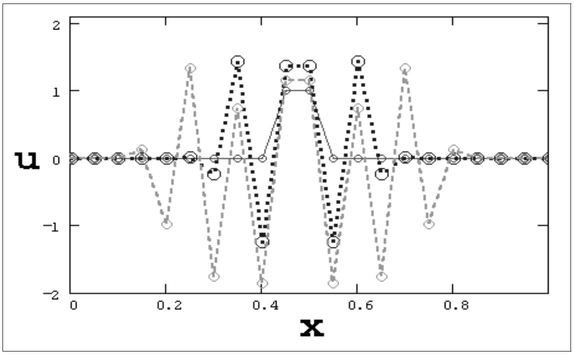

Рис. 17. *Решение (некорректного) обратного уравнения теплопроводности*

Если попробовать осуществить расчет обратного уравнения диффузии тепла по тем же самым алгоритмам, что и для обычных уравнений (для этого достаточно взять в расчетах отрицательное значение коэффициента диффузии, например, D= -1), то мы получим заведомо нефизичное решение. Оно показано на рис. 17 в виде профилей распределения температуры для нескольких последовательных моментов времени. Как видно, решение выражается в появлении все более быстрых пространственных осцилляций профиля температуры для каждого нового момента времени. Существенно, что такое решение является не проявлением неустойчивости численного алгоритма (как для ситуации, рассмотренной в §3), а определяется спецификой самой задачи.

Оказывается, что обратное уравнение теплопроводности принадлежит к довольно широкому классу задач, называемых *некорректными*. Некорректные задачи нельзя решать стандартными методами, а для того, чтобы с ними справиться (т. е., чтобы получить осмысленное физическое решение), приходится несколько менять саму их постановку, вводя в нее дополнительную априорную информацию о строении решения. Некорректные задачи типичны для обработки эксперимента и были широко освещены в гл. 2.