§1. Постановка задач

Постановка *краевых задач* для *дифференциальных уравнений в частных производных* подразумевает нахождение неизвестной функции не одной (как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений), а нескольких переменных, например, f(x,y,z) или f(x,t). Соответственно, уравнения включают в себя производные по различным переменным (частные производные), чаще всего, производные по пространственным координатам x, y и z или по времени t. Таким образом, правильная математическая постановка задач, в любом случае, требует дополнительного задания определенного количества граничных (и, возможно, начальных, если одна из переменных есть время) условий.

Необходимое число и форма начальных и граничных условий обосновывается в соответствующих разделах науки, называемой *математической физикой*. Вообще говоря, уравнениями в частных производных описывается множество разнообразных физических явлений, что позволяет моделировать самые сложные явления и процессы (такие, как диффузия, гидродинамика, квантовая механика, экология и т.д.). Бытует мнение, что этими уравнениями можно объяснить все и вся, и грядущие успехи мировой науки будут напрямую связаны с правильным выписыванием и решением уравнений.

Различные виды дифференциальных уравнений в частных производных требуют, как правило, применения различных, и, подчас, весьма специфических, численных алгоритмов. Более того, некоторые отдельные уравнения с различными параметрами (в частности, характеризующими их нелинейность), могут успешно решаться существенно разными численными методами. Поэтому почти невозможно предложить алгоритм (или даже группу алгоритмов), которые успешно решали бы любое наперед взятое уравнение. Огромное число задач по сей день так и остаются вообще нерешенными, алгоритмы для них отсутствуют, а сама структура решений остается загадкой. Приведем, в частности, такой широко известный пример, как система уравнений гидродинамики, которое, как считает сейчас большинство ученых, должно иметь, при определенных комбинациях параметров, решение, описывающее турбулентное движение жидкости. Между тем, увы, численный эксперимент пока не привел к особенным успехам, хотя в данной области трудится огромное число научных работников.

Как правило, сам процесс решения конкретных уравнений в частных производных – кропотливый научный труд, требующий серьезной подготовки исследователя. Очень часто работа над решением уравнений (в практических случаях – зависящих от трех пространственных координат и требующих, соответственно, серьезных ресурсов компьютера) начинается с рассмотрения сильно упрощенных случаев, цель которых заключается в выработке самого алгоритма решения задачи и выяснения ее особенностей с точки зрения вычислительного эксперимента.

Пример: уравнение диффузии

В качестве примера дифференциальных уравнений в частных производных будем использовать *уравнение диффузии* (в частности, *диффузии тепла*, называемое еще по-другому, *уравнением теплопроводности*):

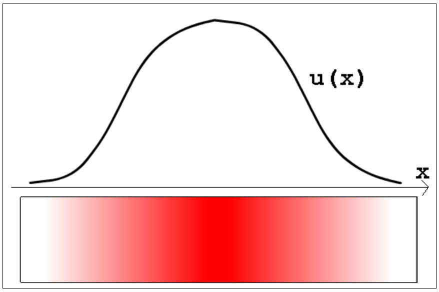

Рис. 1. *Модель уравнения (1)*

$$\frac{d}{dt}u = D\cdot\frac{d^2}{dx^2}u + \phi(x,t) \qquad (1)$$

Отметим, что уравнение (1) – уравнение *параболического* типа, которое содержит первую производную по времени t и вторую – по координате x. Оно описывает динамику (в нашем случае, одномерного) распределения концентрации некоторой примеси u(x,t) при условии, что в некоторых точках имеются источники загрязнения, или динамику температуры металлического стержня u(x,t) в присутствии источников тепла. Описанную физическую модель иллюстрирует рис. 1, на котором (цветом) показано распределение температуры (или концентрации примеси) вдоль оси x, наряду с соответствующей формой искомой функции u(x,t).

Коэффициент диффузии D описывает скорость растекания тепла (или примеси) по пространству. Он, вообще говоря, может зависеть как от координат, так и от самой неизвестной функции u (в последнем случае задача становится *нелинейной*). Уравнение (1) является *линейным*, если источник и коэффициент диффузии либо не зависят от u, либо источник зависит от нее линейно, т.к. в этом случае неизвестная функция u(x,t) и все ее производные входят в уравнение в первой степени. Отметим, что линейное уравнение диффузии имеет аналитическое решение, в то время, как подавляющее большинство нелинейных уравнений в частных производных можно решить только численно.

Из курса математики известно: для того, чтобы уравнение (1) имело единственное решение, необходимо поставить нужное количество начальных и граничных условий. В данном случае, необходимо задать начальное условие:

$$u(x,0)=f_0(x) \qquad (2)$$

и два граничных условия (если уравнение решается на интервале от 0 до L):

$$u(0,t)=f_1(t),\ u(L,t)=f_2(t). \qquad (3)$$

На рис. 2 представлены профили численного решения u(x,t) (об алгоритмах речь пойдет ниже) линейного уравнения без источника тепла, для трех последовательных моментов времени. В качестве начального условия (оно показано на рис.2 пунктиром) использовался некоторый реалистичный профиль температуры (стержень, сильно нагретый в центре, как иллюстрируется рис. 1). В качестве граничных были взяты условия поддержания краев стержня при постоянной температуре, т.е. u(0,t)=u(L,t)=const.

Разумеется, динамика решения описывает ожидаемую картину выравнивания температуры стержня со временем (за счет перетекания тепла от центра к переферии стержня благодаря механизму теплопроводности). Скорость передачи тепла определяется значением коэффициента диффузии D.

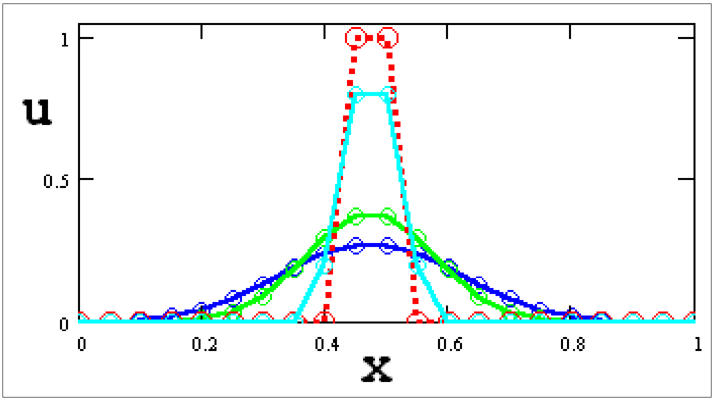

Рис. 2. *Решение уравнения теплопроводности (1)*