

§8. Нелинейные краевые задачи

Все примеры, рассмотренные нами до этого, были связаны с краевыми задачами для линейных ОДУ. Между тем на практике часто приходится исследовать именно нелинейные задачи, которые несравненно сложнее с вычислительной точки зрения. Рассмотрим общий подход к решению нелинейных задач, не забывая о том, что нелинейные ОДУ также могут быть в той или иной степени жесткими.

На примере решения нелинейной задачи взаимодействия световых пучков разберемся с физикой явления, которую описывает нелинейность. Рассмотрим простейшее усложнение модели (3), добавив в уравнения малые слагаемые, зависящие квадратично от интенсивности света. Чтобы быть ближе к физической сущности явления, мы введем эту зависимость в формулу коэффициента поглощения среды $a(x)$, сделав $a(x)$ из (3) функцией не только координаты, но и суммарной интенсивности:

$$a(x, Y, y) = a_0(x) - \varepsilon(x)(Y + y), \quad (44)$$

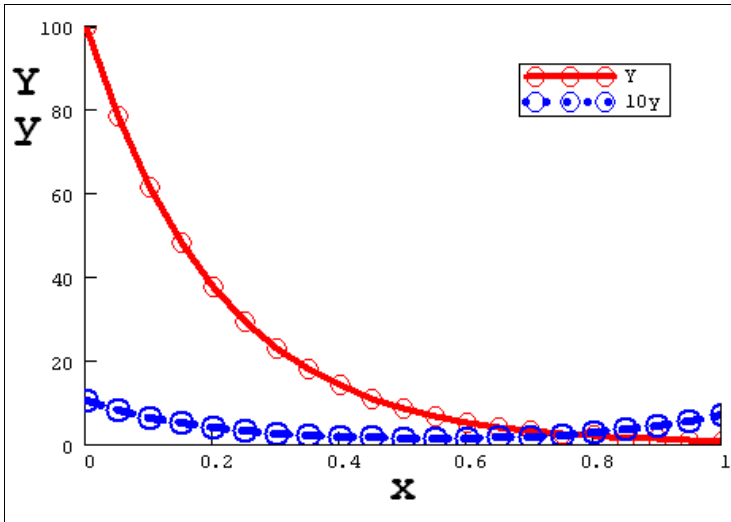
где $a_0(x)$ – постоянная (не зависящая от интенсивности света) составляющая коэффициента поглощения, а $\varepsilon(x)$ – малый коэффициент пропорциональности, вообще говоря, зависящий от координаты. В этом случае модель (3) переписется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dY(x)}{dx} &= -a_0(x) \cdot Y + r(x) \cdot y + \varepsilon(x) \cdot (Y^2 + Y \cdot y), \\ \frac{dy(x)}{dx} &= +a_0(x) \cdot y - r(x) \cdot Y - \varepsilon(x) \cdot (y^2 + Y \cdot y). \end{aligned} \quad (45)$$

Таким образом, физическая подоплека квадратичной нелинейности задачи (45) связана с зависимостью коэффициента поглощения среды от $Y + y$. Иными словами, чем мощнее свет в некоторой точке среды, тем меньше локальный коэффициент поглощения среды в этой точке.

Механизм этого явления будет хорошо понятен, если предположить, что средой является воздух, насыщенный парами жидкости, т.е. туман. Чем сильнее в некоторой точке туман, тем больше локальное поглощение. Если свет, проходящий через туман, имеет малую интенсивность, то он не оказывает на среду никакого (или почти никакого) воздействия. Однако, если пучок света будет очень мощным, за счет его поглощения пары воды будут разогреваться и, следовательно, испаряться. По мере испарения капель воды туман станет рассеиваться, и среда просветлеет (т.е. ее коэффициент поглощения уменьшится). Таким образом, чем мощнее свет, тем активнее пойдет процесс испарения, тем существенно уменьшится коэффициент поглощения. Именно такой эффект, совершенно понятный с физической точки зрения, и описывает формула (44) и, соответственно, модель (45).

Приведем сначала пример решения краевой задачи (45) с теми же граничными условиями, что были поставлены для модели (3) при помощи алгоритма пристрелки (рис. 39). Интерес представляет решение u , описывающее рост интенсивности отраженного пучка по мере его распространения справа-налево. Обратите внимание, что на рис. 39 $u(x)$ отложено с десятикратным увеличением.



*Рис. 39. Решение нелинейной краевой задачи
(алгоритм пристрелки)*

Таким образом, алгоритм стрельбы вполне может справляться и с нелинейными задачами, правда не очень жесткими. Однако, чем сильнее нелинейность и чем жестче краевая задача, тем более ненадежным оказывается применение алгоритма пристрелки.

Подчеркнем еще раз и физический смысл коэффициентов $a_0(x)$ и $\varepsilon(x)$. Первый описывает постоянный (не зависящий от интенсивности света) коэффициент поглощения среды, а второй — его зависимость от эффекта разогрева среды светом. Чем больше коэффициент $a_0(x)$, тем более жесткой является краевая задача; а чем больше $\varepsilon(x)$, тем сильнее ее нелинейность. В предельном случае при $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ задача (45) переходит в линейную задачу (3).

Решение краевых задач при помощи разностных схем связано с необходимостью разработки собственного алгоритма для каждой конкретной задачи. Как вы помните, в случае линейных уравнений в результате построения разностной схемы система алгебраических сеточных уравнений также получалась линейной. Это автоматически означало, что она имеет единственное решение, которое в большинстве случаев могло быть найдено

стандартными численными методами. В ситуации, когда исходные дифференциальные уравнения нелинейны, система разностных уравнений тоже является нелинейной, и их решение существенно усложняется, хотя бы потому, что оно не является единственным. Поэтому подход к построению разностных схем нелинейных уравнений должен быть специфическим, но наградой за него станет решение задач, с которыми не справляется алгоритм стрельбы (например, жестких).

Один из приемов решения нелинейных краевых задач, сводящийся к их линеаризации, заключается в следующем. Предположим, что некоторое приближение (обозначим его $Y(x)$ и $y(x)$) к решению нелинейной задачи (45) нам известно, и можно считать, что $Y \approx Y+Z$ и $y \approx y+z$, где $Z(x)$ и $z(x)$ – близкие к нулю функции x . Тогда, пользуясь их малостью (по сравнению с Y и y), разложим нелинейные слагаемые в уравнениях (45) в ряд Тейлора по Z и z . Получим:

$$\begin{aligned} Y'+Z' &= -aY+ry+\varepsilon(Y^2+yY)-aZ+rz+2\varepsilon Y(Z+z), \\ y'+z' &= +ay-rY-\varepsilon(y^2+yY)+az-rZ-2\varepsilon y(Z+z). \end{aligned} \quad (46)$$

Теперь, поскольку $Y(x)$ и $y(x)$ являются приближением к решению исходной задачи, то можно считать, что они (приблизительно) удовлетворяют и уравнению, и граничным условиям. Тогда, вычитая (45) из (46), получим краевую задачу для $Z(x)$ и $z(x)$:

$$\begin{aligned} Z' &= -aZ+rz+2\varepsilon Y(Z+z), \\ z' &= +az-rZ-2\varepsilon y(Z+z), \\ z(0) &= Z(0)=z(1)=Z(1)=0. \end{aligned} \quad (47)$$

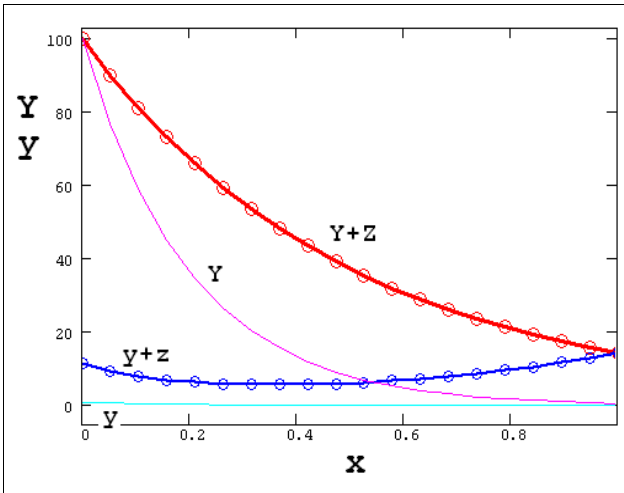


Рис. 40. Решение нелинейной краевой задачи (разностная схема)

Это и есть та самая новая задача для "маленьких" функций $Z(x)$ и $z(x)$, которую надо решить, и которая, благодаря малости Z и z , является линейной. Вся беда в том, что мы не знаем "больших" функций $Y(x)$ и $y(x)$, а они, увы, входят в задачу (47). Тем не менее рецепт получения этих функций напрашивается сам собой. Если нелинейность исходных ОДУ не слишком сильная, то в качестве Y и y выгодно взять решение линейной краевой задачи, т. е. задачи (45) с $\varepsilon(x)=0$. Результат применения описанной последовательности действий к нелинейной краевой задаче показан на рис. 40.

Последний важный момент связан с решением задач, обладающих значительной нелинейностью. Пример, приведенный на рис. 40, согласно самой постановке, не сильно отличается от линейной краевой задачи, поскольку функции $Z(x)$ и $z(x)$ малы по сравнению с $Y(x)$ и $y(x)$. Если же нелинейность сильная, то решение, скорее всего, сильно отличается от Y и y , и линеаризация (47) будет просто неправильной. В этом случае следует слегка усложнить алгоритм решения нелинейной краевой задачи.

Обозначим решение, полученное описанным способом линеаризации исходной задачи, вектором $\mathbf{J}(\varepsilon)$, подчеркивая тем самым его зависимость от параметра нелинейности. Очевидно, что $\mathbf{J}(\varepsilon=0)$ есть решение линейной задачи. Для того, чтобы решить задачу с сильной нелинейностью, т. е. довольно большим $\varepsilon=\varepsilon^1$, есть возможность организовать *продолжение по параметру* ε . Иными словами, используя в качестве начального приближения $\mathbf{J}(\varepsilon=0)$, следует сначала решить задачу для другого, малого $\varepsilon=\Delta\varepsilon$, получив $\mathbf{J}(\varepsilon=\Delta\varepsilon)$, затем, взяв это $\mathbf{J}(\varepsilon=\Delta\varepsilon)$ в качестве приближенного решения, получить $\mathbf{J}(\varepsilon=2\Delta\varepsilon)$ и т. д.. В результате мы, малыми шагами, доберемся до желаемого $\varepsilon=\varepsilon^1$. Повторимся, что в качестве нулевой итерации используется решение линейной задачи, которое получить сравнительно легко.