

## §5. Устойчивость аттракторов

В прошлом разделе мы научились находить неподвижные точки динамических систем. Также мы выяснили, что существует несколько различных типов неподвижных точек и, кроме того, что они бывают устойчивыми и неустойчивыми. С практической точки зрения, для выяснения асимптотического поведения динамической системы на больших временах, часто бывает важным выявить только устойчивые точки. Поскольку неустойчивые точки не притягивают, а наоборот, отталкивают решение, в большинстве случаев они не представляют интереса. Кроме того, важно определить тип точки. В этом разделе мы выясним, исходя из каких соображений и какими численными методами это делается.

Предположим, что мы нашли неподвижную точку системы динамических уравнений. Обозначим ее  $(x^0, y^0)$ . Далее следует определить тип ее устойчивости. Напоминаем, что устойчивость характеризуется поведением системы динамических уравнений в окрестности особой точки  $(x^0, y^0)$ . Поэтому для исследования устойчивости линеаризуем систему уравнений вблизи  $(x^0, y^0)$ . Для этого вместо функций  $x(t)$  и  $y(t)$  введем другие функции:  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ , которые переопределим, соответственно, как:

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t) &= x(t) - x^0, \\ \tilde{y}(t) &= y(t) - y^0.\end{aligned}\tag{39}$$

Подставляя эти определения  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$  в исходную систему дифференциальных уравнений (6), получим новую систему ОДУ, но уже для функций  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$ . Слева в этой системе, согласно (39), появятся значения  $\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t)$ , поскольку производные констант  $x^0$  и  $y^0$  равны нулю.

Справа в системе уравнений зависимости  $f_1(\tilde{x}), f_2(\tilde{y})$  представим в виде разложения в ряд Тейлора. Пользуясь малостью, по определению,  $\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)$  получим:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \frac{\partial f_1}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \tilde{y} + \dots \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= \frac{\partial f_2}{\partial x} \tilde{x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \tilde{y} + \dots\end{aligned}\quad (40)$$

Поведение линеаризованной системы определяется свойствами матрицы Якоби (по-другому, *якобиана*):

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}\quad (41)$$

в точке  $(x^0, y^0)$ .

Мы определяем матрицу  $A(x, y)$ , как функциональную матрицу, составленную из производной  $i$ -й функции по  $j$ -й координате. В случае двух динамических уравнений якобиан будет выражаться матрицей (41). Значения производных, образующих якобиан, берутся в точке  $(x^0, y^0)$ , т.е. в той неподвижной точке, которая ранее была найдена с помощью решения системы нелинейных уравнений.

Линеаризованная система дифференциальных уравнений для  $\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t)$  выражается через элементы функциональной матрицы  $A$ , взятой в точке  $(x^0, y^0)$ . Также заметим, что можно было бы точно написать дифференциальные уравнения для  $\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t)$ . В этом случае, помимо выписанных линейных слагаемых, появились еще и квадратичные (по  $x$  и  $y$ ) члены в разложении формулы Тейлора. Однако, поскольку мы исследуем поведение нашей динамической системы в малой окрестности точки  $(x^0, y^0)$ , то остальные слагаемые много меньше, так что ими можно пренебречь. Поэтому линейного приближения будет достаточно:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A_{11} \tilde{x} + A_{12} \tilde{y} + \dots \\ \dot{\tilde{y}}(t) &= A_{21} \tilde{x} + A_{22} \tilde{y} + \dots\end{aligned}\quad (42)$$

Теория *линейных* систем дифференциальных уравнений хорошо разработана и определить поведение такой линейной системы для  $\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t)$  не составляет труда. Представим основные выводы, связанные с некоторыми понятиями линейной алгебры.

Неподвижной точкой этой системы является начало координат фазовой плоскости  $u_1=0$  и  $u_2=0$ . Тип решений и устойчивость для системы для  $\dot{\tilde{x}}(t), \dot{\tilde{y}}(t)$  будут определяться свойствами элементов  $A_{ij}$  матрицы  $A$ .

Если построить на основе матрицы  $A$  определитель специального вида и приравнять его нулю:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (43)$$

то пара корней  $\lambda_{1,2}$  полученного (в нашем случае системы двух уравнений, квадратного) уравнения, называемого *характеристическим*

$$\lambda^2 - \text{tr}A \cdot \lambda + \det A = 0, \quad (44)$$

определит структуру решения системы ОДУ:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_{11} \exp(\lambda_{1t}) + C_{12} \exp(\lambda_{2t}) \\ y(t) &= C_{21} \exp(\lambda_{1t}) + C_{22} \exp(\lambda_{2t}) \end{aligned} \quad (45)$$

Коэффициенты  $C$  могут быть найдены из начальных условий, а само характеристическое уравнение легко решить аналитически, получив два корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Они называются собственными значениями матрицы  $A$ . Эти собственные значения могут быть как действительными, так и комплексными. В зависимости от сочетания свойств собственных значений  $A$ , решения (45) определяют (устойчивую или неустойчивую) особую точку  $(0,0)$  типа фокус, узел, либо центр. А именно:

- $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – действительные, причем и  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ : фазовый портрет – устойчивый узел (рис. 1.31).

- $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – действительные, причем хотя бы одно из них положительное: решения неограниченно возрастают, а фазовый портрет – неустойчивый узел (или седло);
- $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно-сопряженные числа с отрицательной действительной частью  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ ,  $\text{Re}(\lambda_2) < 0$ : решения – затухающие гармонические колебания, а фазовый портрет – устойчивый фокус;
- $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – комплексно-сопряженные числа, причем действительная часть хотя бы одного из них положительна: решения имеют вид расходящихся колебаний и неограниченно возрастают, а фазовый портрет – неустойчивый фокус;
- $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – чисто мнимые, т.е.  $\text{Re}(\lambda_1) = \text{Re}(\lambda_2) = 0$ : решения – это незатухающие гармонические колебания, которым соответствует фазовый портрет в виде концентрических замкнутых линий (эллипсов), причем в их центре находится неподвижная точка типа *центр*.

Таким образом, об устойчивости особой точки говорит знак действительной части собственных значений матрицы  $A$ . Если  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ , то особая точка является устойчивым узлом или фокусом. Если  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) > 0$ , то особая точка является неустойчивым узлом или фокусом. Наконец, если  $\text{Re}(\lambda_1)$  и  $\text{Re}(\lambda_2)$  разных знаков, то особая точка – это седло. Если хотя бы одно из собственных значений равно нулю, то рассматриваемая динамическая система является грубой и особая точка имеет тип центр.

Итак, численный анализ устойчивости и типа особых точек сводится к следующему алгоритму:

1. Надо подсчитать функциональную матрицу

$$A \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \text{ в точке } (x^0, y^0). \quad (46)$$

2. Зная элементы матрицы  $\mathbf{A}$  в особой точке, следует решить численным методом характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \text{tr}\mathbf{A} \cdot \lambda + \det\mathbf{A} = 0 \quad . \quad (47)$$

В случае динамической системы из двух уравнений характеристическое уравнение является квадратичным и решается аналитически. В более общем случае, когда система имеет динамических уравнений состоит из большего числа дифференциальных уравнений, то и матрица  $\mathbf{A}$  имеет большее количество строк и столбцов и, соответственно характеристическое уравнение имеет больший порядок относительно  $\lambda^i$ . Значит, в общем случае, характеристическое уравнение придется решать численно.

Определив корни  $\lambda_1 \dots \lambda_N$  характеристического уравнения, можно также сразу определить тип особой точки и ее устойчивость. Если действительная часть хотя бы одного собственного значения будет больше нуля, то особая точка станет неустойчивой. Соответственно, устойчивые точки требуют, чтобы выполнялось соотношение  $\text{Re}(\lambda_1, \lambda_2) < 0$ .

Повторимся: численные методы для анализа устойчивости и типов особых точек динамических систем сводятся: во-первых, к численному дифференцированию функций согласно (46), а во-вторых к численному решению характеристических уравнений (47), что, фактически, связано с отделением корней полинома. Отметим, что для такой задачи разработаны специальные методы. В общем случае, динамическая система может иметь не одну, а несколько особых точек. Задача исследования фазового портрета состоит в определении типа, а также устойчивости каждой из особых точек.

### ***Пример: логистические модели (продолжение)***

Вернемся к задачам анализа аттракторов двух логистических моделей (27) и (29).

Напомним, что для классической модели

$$\frac{du}{dt} = u - Bu^2 \quad (48)$$

мы аналитически нашли два аттрактора  $u_0=0$  и  $u_1=1/B$ . Для того, чтобы определить их тип и исследовать устойчивость, следует линеаризовать исходное ОДУ в этих точках.

Для  $u_0=0$  в силу малости самой функции  $u(t)$  вблизи нуля получаем линеаризованное уравнение

$$\frac{du}{dt} = u \quad (49)$$

Характеристическое уравнение в одномерном случае дает

$$\lambda = 1 > 0 \quad (\text{при любом } B). \quad (50)$$

Поскольку характеристическое число положительно, то  $u_0$  является неустойчивым узлом (т.е. не аттрактором, а репеллером).

Для того, чтобы записать линеаризованное уравнение во второй неподвижной точке  $u_1=1/B$ , следует ввести новую неизвестную функцию  $y(t)=u(t)-1/B$ , которая в окрестности  $u_1=1/B$  будет близка к нулю. Таким образом, подставляя значение  $y(t)$  в исходное уравнение (48) и раскладывая его в ряд Тейлора, получаем линеаризованное уравнение в окрестности  $u_1=1/B$ :

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad (51)$$

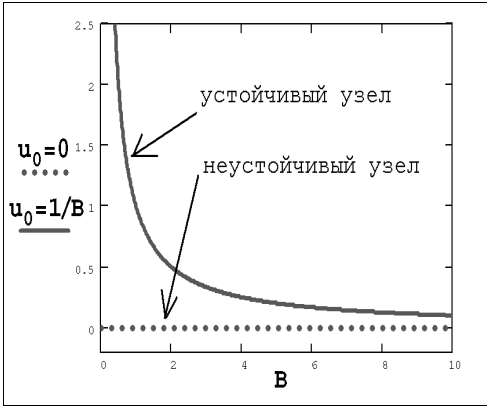


Рис. 26. Зависимость узлов модели (48) от параметра  $B$

провести аналитически) стала идентификация единственного аттрактора исходного ОДУ (48) и единственного репеллера (неустойчивой неподвижной точки). Аттрактор, т.е. устойчивый узел  $1/B$ , сохраняется для всех значений параметра модели  $B$ , что иллюстрируется рис. 26.

Одно из решений (для некоторого значения параметра  $B$  и определенного начального условия) было изображено на рис. 16 (в виде пунктирной кривой). Очевидно, что для других значений параметра  $B$  структура решения (его S-образный профиль) сохраняется, а его асимптотическое поведение сдвигается вверх или вниз, в соответствии с положением аттрактора  $u_1=1/B$ .

Рассмотрим теперь вторую (усложненную) модель:

$$\frac{du}{dt} = u - \ln(Bu^2), \quad (53)$$

аттракторы которой, найденные численным методом, были изображены на рис. 18. Последним этапом исследования фазового портрета (53) является классификация найденных особых точек, для чего следует проанализировать соответствующие характеристические числа. Для этого сначала необходимо разложить ОДУ (53) в ряд Тейлора в точках  $u=u^0(B)$ , а затем

Из характеристического уравнения получаем:

$$\lambda = -1 < 0 \quad (\text{при любом } B). \quad (52)$$

Поскольку характеристическое число отрицательно, точка  $u_1=1/B$  является устойчивым узлом, т.е. единственным аттрактором модели (48).

Итогом нашего анализа (который, в силу простоты исходной модели, удалось

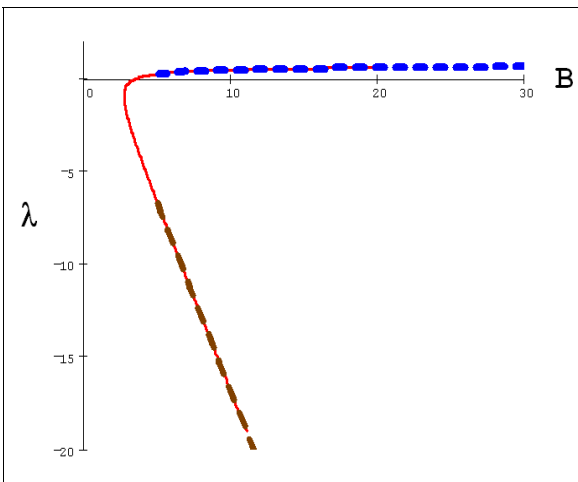
изучить полученное линеаризованное уравнение для новой неизвестной функции  $y(t)=u(t)-u^0$ , пользуясь ее малостью в окрестности неподвижной точки  $u^0$ .

Подставляя значение  $y(t)$  в исходное ОДУ (53) и раскладывая его в ряд Тейлора, получаем линеаризованное уравнение в окрестности  $u^0$ :

$$\frac{dy}{dt} = \left(1 - \frac{2}{u_0}\right)y + u_0 - \ln(Bu_0^2), \quad (54)$$

для которого характеристическое уравнение выглядит так:

$$\lambda = 1 - 2/u_0. \quad (55)$$



*Рис. 27. Характеристическое число (55) как функция параметра В*

Т.к. аттракторы ОДУ (53) были получены численным методом, то и характеристические числа следует оценивать численно. Конечно, следует помнить о том, что значение  $u^0$  в (54) и (55) является функцией параметра В. Этот график был показан на рис. 18. Таким образом, для завершения анализа фазового портрета

следует просто вычислить выражение (55) для обеих ветвей корней, которые были показаны на рис. 18.

Оказывается (рис. 27), что для всей верхней ветви решения характеристические числа положительные, а для нижней – отрицательные. Иными словами, верхняя ветвь графика на рис. 18 соответствует неподвижным точкам исходного ОДУ (53) типа неустойчивый узел, а нижняя – аттракторам типа устойчивого



узла. Таким образом, как мы узнаем из следующего параграфа, при  $V=V_0$  происходит бифуркация рождения пары особых точек – устойчивого и неустойчивого узла, тип которых при  $V>V_0$  сохраняется.

В многомерных случаях расчеты зачастую куда более сложные, однако сам их сценарий остается тем же: нахождение неподвижных точек как корней соответствующего алгебраического уравнения, линейризация в их окрестности исходной системы ОДУ, дающая информацию о типе и устойчивости особых точек. В многомерном случае последнее означает решение характеристических уравнений типа (44) и (55).