

§9. Устойчивость

В прошлом разделе мы разобрали основные критерии разностных схем для ОДУ, но пока не касались, пожалуй, основного их свойства – устойчивости. В качестве примера при рассмотрении свойств устойчивости возьмем модель осциллятора (57) из прошлого раздела:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(x, t)}{m} \quad (66)$$

Здесь m – масса колеблющегося груза, а F – сила, которая может зависеть как от времени t , так и от x . При нелинейной зависимости $F(x)$ уравнение (66), очевидно, будет нелинейным.

При помощи схемы Эйлера (59) решим уравнение (66), используя разное значение шага сетки h . Оказывается, что при малых h решение получается правильным, а вот, если $h > h_{cr}$ сеточное решение вдруг изменяется до неузнаваемости, не имея ничего общего с точным решением (рис. 26).

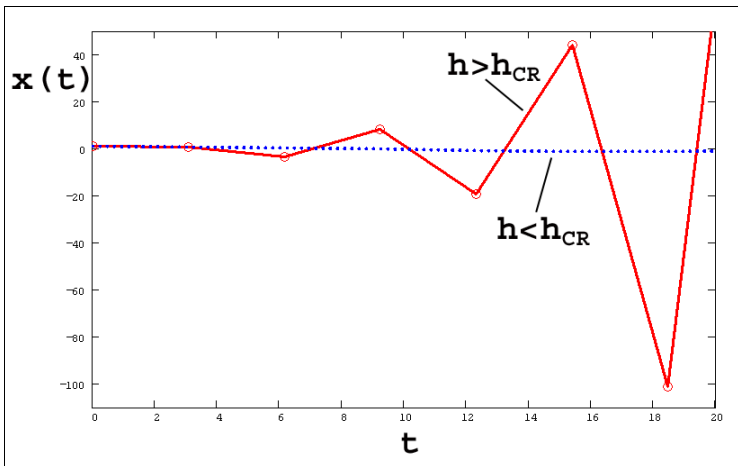


Рис. 26. Неустойчивое решение (67)

В чем же дело? Оказывается схема (59) является *условно-устойчивой*: при $h > h^{cr}$ алгоритм становится *неустойчивым*, что приводит к неправильному решению исходного ОДУ.

Вообще говоря, критерий устойчивости может быть отнесен как к самому уравнению, так и к алгоритму его решения. Понятие устойчивости связано с малыми возмущениями дифференциального уравнения. Для того, чтобы принять их в рассмотрение, добавим в правую часть уравнения (66) погрешность ε :

$$\ddot{x}(t) = \frac{F}{m} + \varepsilon \quad . \quad (67)$$

Надо сказать, что подобные малые возмущения всегда присутствуют при расчетах на компьютере, объясняясь, в частности, ошибками округления. Соответственно, точное решение $x(t)$ уравнения (67) при $\varepsilon \neq 0$ будет отличаться от точного решения уравнения (66). Отметим, что (67) переходит в (66) при $\varepsilon = 0$.

Если при малых $\varepsilon \neq 0$ решение (67) $x^\varepsilon(t)$ будет мало отличаться от $x(t)$ – решения при $\varepsilon = 0$, то говорят, что это уравнение *устойчиво* относительно возмущений правой части. И наоборот, если решения будут отличаться сильно, то говорят, что само уравнение *неустойчиво*.

С математической точки зрения более правильно говорить об определении устойчивости, как о стремлении $x^\varepsilon(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к точному решению $x(t)$ при $\varepsilon = 0$:

$$x^\varepsilon(t) \rightarrow x(t) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad . \quad (68)$$

Аналогично можно ввести понятие устойчивости относительно возмущений начальных условий. Те же самые рассуждения применимы, если добавить малую величину ε к начальным условиям, которые дополняют ОДУ до правильной постановки задачи Коши:

$$x(0) = x_0 + \varepsilon_1, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 + \varepsilon_2 \quad . \quad (69)$$

Только что введенное определение устойчивости касалось самого дифференциального уравнения. Однако, устойчивым или неустойчивым может быть и сам алгоритм решения этого уравнения. В понятии *устойчивости алгоритма* все будет относиться к отысканию численного решения $x^e(t)$ при возмущениях самого уравнения, т.е. его правой части, либо начальных условий:

$$\frac{x^{i+1} - 2x^i + x^{i-1}}{\tau^2} = \frac{F^i}{m} + \varepsilon^i . \quad (70)$$

Решать неустойчивое уравнение численными методами практически не имеет никакого смысла. Во время численного решения на компьютере в любом случае добавляются некоторые погрешности. Погрешности связаны в первую очередь с машинным округлением чисел, а также с различными ошибками численных методов, которые используются при подсчете тех или иных элементов уравнения. Поэтому в дальнейшем мы будем анализировать устойчивость именно численного алгоритма, неявно предполагая, что само уравнение, которое мы решаем, является устойчивым.

Как правило, анализ устойчивости алгоритма решения ОДУ сводится к оценке эволюции погрешности при реализации шага. Предположим, что на i -м шаге решения дифференциального уравнения погрешность составляла ε^i . Эта погрешность была внесена различными ошибками округления и численных методов. Если при переходе к $(i+1)$ -му шагу эта погрешность существенно возрастает, то можно говорить о неустойчивости метода. И напротив, если погрешность растет слабо, то алгоритм устойчив.

Вернемся к модели гармонического осциллятора и покажем, как можно проанализировать устойчивость той или иной разностной схемы. По-прежнему, пусть $x^0(t)$ – неизвестное нам точное решение ОДУ. Поскольку численный метод дает решение с некоторой погрешностью, то можно записать, что оно равно $x^0(t) + \varepsilon(t)$. Подставим это выражение в исходное ОДУ (66):

$$\ddot{x}^0 + \ddot{\varepsilon} = \frac{F(x^0 + \varepsilon)}{m} . \quad (71)$$

Далее, пользуясь тем, что для $x^0(t)$ дифференциальное уравнение (66) выполнено точно, сразу получим дифференциальное уравнение для функции $\varepsilon(t)$:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{m} (F(x^0 + \varepsilon) - F(x^0)) . \quad (72)$$

Вспоминая определение производной функции и применяя предположение о малости $\varepsilon(t)$, запишем это выражение как:

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{1}{m} (F(x^0 + \varepsilon) - F(x^0)) \approx \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x^0} \varepsilon . \quad (73)$$

В результате, мы получили дифференциальное уравнение для погрешностей $\varepsilon(t)$. Подчеркнем, что мы вывели его исключительно из исходного уравнения (66) для $x(t)$. Если подставить в сеточное уравнение (59) в качестве x^i сумму $x^0(t) + \varepsilon(t)$, то получится выражение:

$$\frac{\varepsilon^{i+1} - 2\varepsilon^i + \varepsilon^{i-1}}{\tau^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \varepsilon^i . \quad (74)$$

Уравнение (74) является сеточным уравнением для погрешности $\varepsilon^i(t)$. Функция $F(x,t)$ и, соответственно, ее производная $\frac{\partial F}{\partial x}$

зависят от двух переменных (x,t) . Поэтому решить полученное сеточное уравнение никак не проще, чем исходное уравнение для функции $x(t)$. Но нам нужна просто оценка для ε^i , и поэтому мы можем решать не само уравнение (74), а несколько упрощенное уравнение, полученное из грубого приближения функции $\frac{\partial F}{\partial x}$.

В модели осциллятора $\frac{\partial F}{\partial x}$ – величина отрицательная, физически описывающая возвращающую силу в колебаниях. В

частности, для простого гармонического осциллятора функция $F(x,t)=-x$ и, соответственно,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -1 \quad . \quad (75)$$

Поэтому для оценки поведения погрешности ε^i можно вынести знак « \rightarrow » из правой части уравнения, а вместо $\frac{\partial F}{\partial x}$ использовать ее максимальное значение по модулю (которое мы обозначим символом Ω):

$$\frac{\varepsilon^{i+1} - 2\varepsilon^i + \varepsilon^{i-1}}{\tau^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial F}{\partial x} \varepsilon^i \sim - \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\max} \equiv \Omega^2 \quad . \quad (76)$$

Зная конкретный вид $F(x,t)$, эту константу Ω довольно легко оценить. Таким образом, окончательное модельное уравнение для погрешности, которое нам предстоит исследовать, запишется следующим образом:

$$\varepsilon^{i+1} - 2\varepsilon^i + \varepsilon^{i-1} = -\Omega^2 \frac{\tau^2}{m} \varepsilon^i \quad . \quad (77)$$

ОДУ (77) – это линейное уравнение, и его довольно просто решить. Как это принято в математике, для решения таких разностных уравнений, мы будем искать решение ε^i в виде комбинации $\varepsilon^i = A\lambda^i$ (λ в i -й степени), где A и λ – это некоторые числа. В результате подстановки такого вида решения мы получим выражение для λ :

$$\lambda^{i+1} - 2\lambda^i + \lambda^{i-1} = -\Omega^2 \frac{\tau^2}{m} \lambda \quad . \quad (78)$$

Пользуясь тем, что погрешность $\varepsilon^i \neq 0$ и соответственно $\lambda \neq 0$, мы можем разделить обе части данного выражения на λ^{i-1} . В результате, получим квадратичное уравнение относительно λ :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = -\Omega^2 \frac{\tau^2}{m} \lambda \quad . \quad (79)$$

Решениями этого (квадратичного) уравнения будет пара чисел:

$$\lambda = 1 - \Omega^2 \frac{\tau^2}{2m} \pm \frac{\tau^2}{2m} \cdot \sqrt{1 - \frac{4m}{\Omega^2 \tau^2}} . \quad (80)$$

Исходя из предположения о степенной зависимости решения от шага $\varepsilon^i = A\lambda^i$, можно заключить, что, если полученные решения λ будут меньше или равны 1, то погрешность $\varepsilon^i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Соответственно, поскольку погрешность будет уменьшаться от шага к шагу, решение исходного ОДУ будет устойчивым.

Справедливо и обратное – если $\lambda > 1$, то ε^i при $i \rightarrow \infty$ будет неограниченно расти, и само решение будет расходиться. Таким образом, численный алгоритм может быть как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от комбинации оценки Ω и величины шага τ . Когда выполнено условие устойчивости $|\lambda| \leq 1$ приведенной разностной схемой можно пользоваться для решения дифференциального уравнения, а когда условие $|\lambda| \leq 1$ будет нарушено, то численное решение будет приводить к неправильным расходящимся результатам.

Пример: линейное ОДУ

В завершение разговора о критериях алгоритмов решения ОДУ, суммируем полученную информацию, рассмотрев три схемы Эйлера на примере линейного уравнения

$$\frac{du}{dt} = -Au , \quad (81)$$

единственным решением которого (при положительных A) является устойчивый узел $u=0$. Точное решение уравнения (81) – это функция

$$u(t) = \exp(-At). \quad (82)$$

Составим три схемы Эйлера, сопровождая их краткими комментариями.

СХЕМА 1.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} = -Au_i, \quad (83)$$

явная, несимметричная, устойчивая при $\Delta < A/2$, 1-го порядка аппроксимации $o(\Delta)$.

СХЕМА 2.

$$\frac{u_{i+2} - u_i}{2\Delta} = -Au_i, \quad (84)$$

явная, симметричная, многошаговая (трехточечная), 2-го порядка аппроксимации $o(\Delta^2)$, неустойчивая при любых Δ .

СХЕМА 3.

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta} = -A \frac{u_{i+1} - u_i}{2}, \quad (85)$$

неявная, симметричная, устойчивая при всех Δ , 2-го порядка аппроксимации $o(\Delta^2)$.

Результаты расчетов по этим трем схемам приведены на рис. 27 и 28. Примечательно, что схема 1 дает правильное (конечно, с поправкой на малую погрешность метода) решение, а схема 2 – совершенно неверное, ввиду своей неустойчивости.

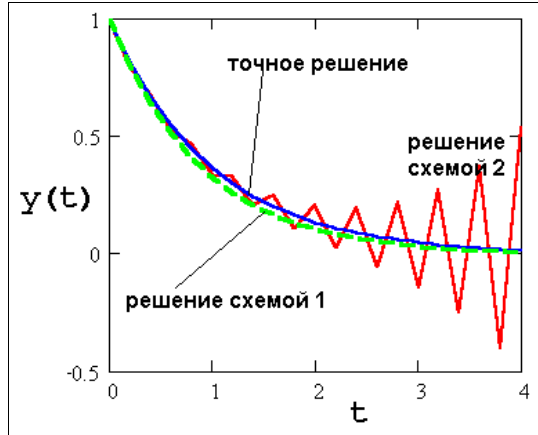


Рис. 27. Решение ОДУ (82) (схемы 1, 2)

Напомним, что *явной* называют схему, в которой неизвестное значение искомой функции (на $i+1$ шаге) стоит только в левой части, а в правой части находятся уже вычисленные ранее значения функций. Если в правой части стоят неизвестные значения функций, то схема называется *неявной*. Среди приведенных схем только схема 3 неявная. Однако, т.к. конкретная задача линейная, то неизвестное значение u_{i+1} из правой части можно перенести в левую и разрешить относительно него уравнение реализации шага.

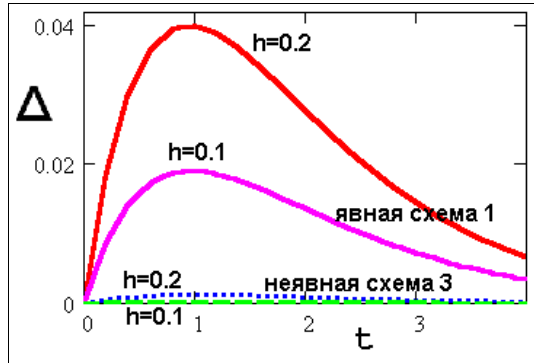


Рис. 28. Точность решения (82) (схемы 1, 3)

Самое главное свойство алгоритма – это его точность. Совершенно естественно, приступая к численному решению дифференциального уравнения, мы хотим, чтобы полученное решение было как можно ближе к точному решению. Сравним решения нашей линейной задачи (81) которые предоставляют две из трех приведенных там Эйлеровых схем, с аналитическим решением (82). На рис. 28 изображена ошибка между точным решением (82) и вычисленным с использованием двух методов. Видно, что неявная схема дает намного меньшие ошибки, чем несимметричная явная. Ошибка падает с уменьшением шага Δ .

С помощью вычислительных тестов можно оценить степень уменьшения ошибки в зависимости от величины шага. Из рис. 28 видно, что схема 1 дает решение, которое стремится к точному при $\Delta \rightarrow 0$ как $o(\Delta)$, а схема 3 – как $o(\Delta^2)$. Напомним, что схема обладает N -м порядком точности, если полученное с ее помощью решение стремится к точному решению задачи Коши для ОДУ как $o(\Delta^N)$ при $\Delta \rightarrow 0$. Схема тем лучше, чем выше порядок точности.

Чем меньше шаг Δ , тем меньше невязка между ОДУ и аппроксимирующим его разностным уравнением. Соответственно, N -й порядок аппроксимации означает, что невязка стремится к нулю как $o(\Delta^N)$ при $\Delta \rightarrow 0$. Схема 1 имеет первый порядок аппроксимации, а схемы 2 и 3 – второй.

Порядок точности не всегда совпадает с порядком аппроксимации. Сначала вспомним о начальных условиях и для этого рассмотрим другой пример ОДУ:

$$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y}, \quad (86)$$

с правой частью и начальным условием $y(0) = y_0$. Точное решение задается функцией

$$y(t) = (t + (y_0)^{1/2})^2. \quad (87)$$

Если искать решение по схеме 2 (с поправкой, конечно, на другую правую часть, т.к. у нас уже другая задача), которая имеет второй порядок аппроксимации, то потребуется на первом шаге как-то задать y_1 .

Результат расчетов при (самом простом)

выборе $y_1 = y_0$ показан пунктиром на рис 29. Увы, точность схемы 2 не лучше точности схемы 1 (сплошная кривая), которая обеспечивает только 1-й порядок аппроксимации. Так что не все зависит от порядка аппроксимации схемы, важна еще и соответствующая аппроксимация начальных условий. На том же рисунке показан расчет по схеме 2, в которой первый шаг

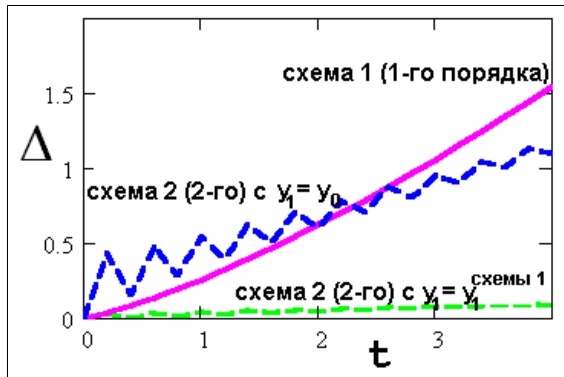


Рис. 29. Точность решения ОДУ (86) при помощи схем 1 и 2

делается по формуле схемы 1. Можно еще его улучшить, составив для первого шага аппроксимацию 2-го порядка.

Самое опасное свойство разностных схем – условия ее *устойчивости*. Бывают *неустойчивые* схемы, по которым вообще ничего нельзя считать, или неустойчивые при некоторых условиях (например, ограничениях на шаг Δ , наподобие той, что была использована для решения уравнения осциллятора).

Казалось бы, и в случае линейного уравнения (81) 2-я схема должна дать лучшее решение, т.к. обладает лучшим порядком аппроксимации. Но из рис. 27 видно, что решение по схеме 2 не имеет ничего общего с аналитическим решением. Это происходит потому, что она является *неустойчивой*. Устойчивость означает, что неточность задания начального условия и вычислительные ошибки, вносимые на каждом шаге (например, округления) не нарастают чрезмерно (т.е. не «подавляют», в конечном счете, решения). Пользуясь несложными выкладками, можно показать, что схема 2 (для рассматриваемой линейной задачи) абсолютно неустойчива, схема 1 устойчива при $\Delta < A/2$, а неявная схема 3 устойчива при любом шаге Δ .

Обычно *симметричные* схемы лучше *несимметричных*, поэтому часто стараются написать симметричную разностную схему. Именно из-за симметрии схемы 2 и 3 имеют лучший порядок аппроксимации). Естественно, худшая аппроксимация схемы 1 заставляет для достижения хорошей точности использовать меньший шаг, чем, например, схема 3. Потому она работает намного медленнее, или, как говорят, *эффективность* схемы низкая. Обычно эффективность алгоритма (или скорость расчета) легче всего определить численно, проведя несколько вычислительных тестов.

Еще раз повторимся, что алгоритм Эйлера был нами использован в качестве примера, для того, чтобы разобраться с основными свойствами и проблемами численных методов решения ОДУ. В настоящее время используются более надежные и эффективные

алгоритмы, являющиеся устойчивыми при решении большинства задач.