§7. Алгоритмы Рунге-Кутты

Наиболее эффективным и часто использующемся методом решения ОДУ остается метод Рунге-Кутты. Большинство расчетов задач Коши для ОДУ, которые не являются жесткими, и по сей день выполняются с помощью данного алгоритма. состоящую в интегрировании этого уравнения от y_0, которое известно, до y_N. Иными словами, следует определить все $y_0 \ldots y_i \ldots y_N$.

Практически все алгоритмы решения дифференциальных уравнений состоят в предложении той или иной формулы пересчета y_{i+1} через y_i. Как уже отмечалось, можно написать точную формулу (42) для получения y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)\,dt \quad . \tag{47}$$

Основная идея алгоритмов Рунге-Кутты состоит в замене функции f(t,y), которая зависит от неизвестной функции y(t), некоторым приближением. Чем точнее будет приближенное значение подынтегральной функции, которое мы сейчас предложим, тем точнее в итоге будет посчитан интеграл (47), т.е. тем точнее будет определено y_{i+1}.

Для подсчета интеграла в (47) мы используем формулу прямоугольников, т.е. значение в средней точке интервала $f_{i+0.5} \equiv f(t_{i+0.5}, y_{i+0.5})$, умноженное на h: $h \cdot f_{i+0.5}$. Покажем, что погрешность такого приближения будет составлять $o(h^3)$. Для определения этой погрешности используем разложение функции f(t) в ряд Тейлора в точке t_i и возьмем его в средней точке интервала:

$$f(t=t_i+0.5h) \approx f_i + 0.5hf`_{i+0.5} + o(h^2). \tag{48}$$

Теперь в этой формуле заменим производную функции f(t,y) ее разностным аналогом:

$$\frac{df(t_i+0.5)}{dt} \approx \frac{h}{2} \cdot \frac{f_{i+0.5} - f_i}{0.5} \quad . \tag{49}$$

В итоге, f_i сократится, и в правой части (49) останется значение функции в средней точке с погрешностью $o(h^2)$: $f_{i+0.5}+o(h^2)$. Поэтому суммарная погрешность пересчета y_{i+1} в формуле (49) составит $o(h^3)$.

Однако, в полученную формулу нам надо откуда-то подставить (неизвестное) значение $y_{i+0.5}$. Поскольку сама формула (49) записана с точностью до $o(h^3)$, ничто не мешает подставить не точное, а приближенное значение $f_{i+0.5}$. Для получения приближения к $f_{i+0.5}$ мы используем опять разложение в ряд Тейлора, но теперь уже самой неизвестной функции y(t), взяв его из явной формулы Эйлера. Выпишем схему Эйлера (18) для середины шага, начиная от точки i до i+0.5. Разностный аналог производной $f`_{i+0.5}$ будет равен:

$$\frac{dy(t_i+0.5)}{dt} \approx \frac{y_{i+0.5} - y_i}{\frac{h}{2}} = f_i + o(h) \quad . \tag{50}$$

Локальная точность этой формулы равна o(h). Если выразить из нее искомую $y_{i+0.5}$ через y_i и f_i, то точность этого выражения будет равна уже $o(h^2)$. Такой точности как раз достаточно. В основной формуле, которую мы выводим для алгоритма Рунге-Кутты, $y_{i+0.5}=y_i+hf_{i+0.5}+o(h^3)$, значение функции $f`_{i+0.5}$ берется со множителем h. Если подставить в качестве аргумента значение $y_{i+0.5}+o(h^2)$, то суммарная локальная точность всей формулы составит $o(h^3)$. Лучшего порядка аппроксимации нам и не нужно, поскольку вся формула выписана с точностью до $o(h^3)$.

Полученный нами алгоритм (50) называется *алгоритмом Рунге-Кутты 2-го порядка*. Он требует вычисления функции f в двух точках: f_i и $f_{i+0.5}$. Запишем формулы алгоритма Рунге-Кутты в более традиционном виде, принятом в большинстве учебников:

1. На первом этапе считается промежуточное значение величины $к_1$, которое равно: $к_1=0.5hf_i$.
2. Второй этап алгоритма сводится к пересчету y_{i+1} через y_i и значение функции $f(t_{i+0.5}, y_i + к_1)$.

Повторим еще раз идею алгоритмов Рунге-Кутты. Она состоит в том, чтобы в правую часть уравнения в качестве аргумента функции f(t,y) брать не точные, а приближенные значения y, в рассмотренном случае, $y_{i+0.5}$. В формулу (47) интегрирования дифференциального уравнения на i-м шаге в качестве аргумента функции f(t,y) мы подставили не само неизвестное $y_{i+0.5}$, а его приближение: $y_{i+0.5}=y_i+к_1$. Мы использовали такую аппроксимацию, чтобы суммарная локальная точность составила $o(h^3)$.

Напоминаем, что мы применяли формулу прямоугольников для вычисления элементарного интеграла на i-м шаге. Идея алгоритмов Рунге-Кутты более высоких порядков сводится к применению более точных формул интегрирования. Например, при интегрировании методом Симпсона для аппроксимации подынтегральной функции квадратичной параболой мы получим точность $o(h^4)$. Платой за нее будет необходимость вычисления значения функции f уже не в двух точках, а в трех.

Похожим образом выводится формула алгоритмов Рунге-Кутты более высоких порядков. Путем многочисленных вычислительных экспериментов установлено, что наилучшее соотношение точности и объема вычислений дает метод Рунге-Кутты 4-го порядка, формулы которого выглядят так:

$$
\begin{aligned}
&к_1=0.5hf_i,\\
&к_2=0.5hf(t_i+0.5h,\ y_i+k_1),\\
&к_3=hf(t_i+0.5h,\ y_i+k_2),\\
&к_4=hf(t_i+h,\ y_i+k_3),\\
&y_{i+1}=y_i+1/3(k_1+2k_2+k_3+0.5k_4)+o(h^5).
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Алгоритм 4-го порядка имеет локальную точность $o(h^5)$. Согласно нашей классификации, алгоритмы Рунге-Кутты являются *явными*. Они имеют легко оцениваемый объем вычислений и сочетают простоту, эффективность и хорошую точность. Для алгоритма 4-го порядка следует вычислить функцию f на каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения в 4-х точках.

Отметим, что имеется ряд модификаций методов Рунге-Кутты, применяемых для повышения быстроты расчетов. Например, алгоритм *с переменным шагом* разбивает интервал не на равномерные интервалы, а более оптимальным способом. Он эффективен, если известно, что решение на рассматриваемом интервале меняется слабо, либо существуют участки медленных и быстрых его изменений.

Пример: линейное уравнение

В завершении раздела покажем пример применения алгоритма Рунге-Кутты для решения конкретного уравнения:

$$\frac{dy}{dt}=Ay \quad . \tag{52}$$

Численное и точное решение $y=y_0\cdot\exp(-At)$ показано на рис. 22, а их разность (по модулю), в зависимости от шага – на рис. 23.

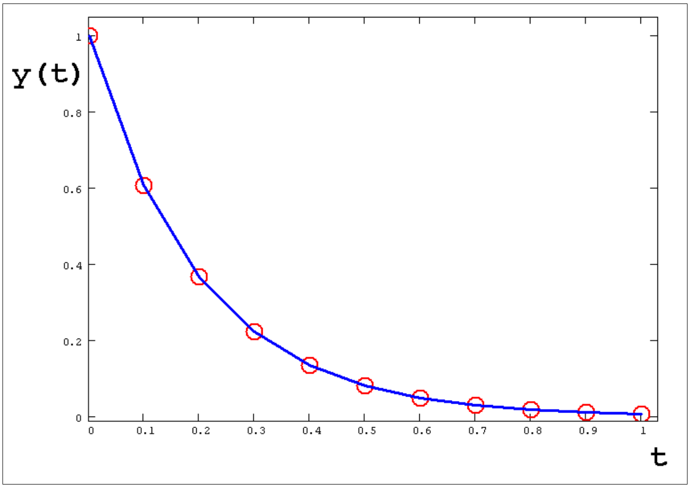

Рис. 22. *Решение (52) при помощи алгоритма Рунге-Кутты (точки) и точное решение (кривая)*

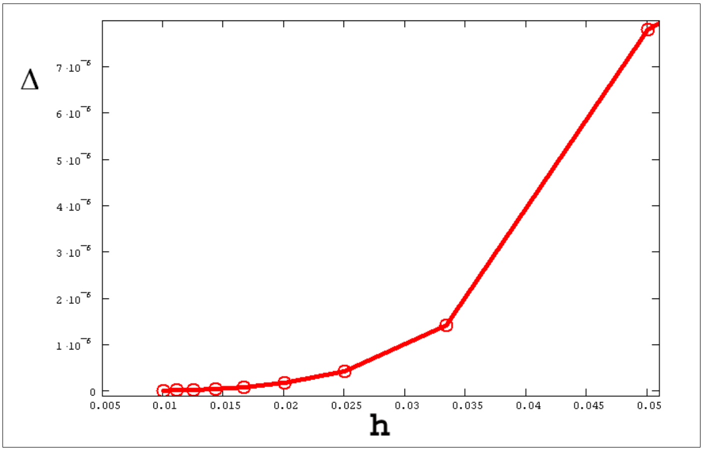

Рис. 23. *Точность решения (52) алгоритмом Рунге-Кутты в зависимости от шага*

Если проанализировать зависимость точности решения уравнения от шага Δ(h) (рис. 23), то можно убедиться в том, что она, как и ожидается, носит степенной характер $\Delta(h) \sim h^4$.