§6. Алгоритм Адамса – Бэшфорта

В прошлом разделе мы классифицировали алгоритмы решения ОДУ, рассмотрев в качестве примера многошагового метода алгоритм «предиктор-корректор» (39). Возможная модификация данного метода состоит в том, что можно вообще не использовать ресурсоемкую фазу корректора, состоящую в уточнении y_{i+1} неявным методом, а ограничиться простой экстраполяцией функции $f_{i+1}=f(t_{i+1})$.

Вернемся к постановке самой задачи Коши (15-16), которая включает дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(t,y) \qquad (40)$$

и начальное условие $y(0)=y^0$. Если мы рассматриваем i-й шаг решения задачи Коши, то имеем известное y_i и хотим пересчитать его в неизвестное y_{i+1}. *Точная* формула этого пересчета выражается интегралом от функции f(t,y) в пределах от 0 до t_{i+1}:

$$y_{i+1}=\int_0^{t_{i+1}} f(t,y)\,dt \quad . \qquad (41)$$

Если мы знаем значение y_i, то эта формула слегка упрощается:

$$y_{i+1}=y_i+\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y)\,dt \quad . \qquad (42)$$

Идея многошагового метода состоит в том, что вместо функции f(t,y) от неизвестного аргумента y(t), можно подставить под знаком интеграла некоторую экстраполяцию f(t,y), построенную по предыдущим точкам f_{i-1}, f_{i-2} и т.д., которые уже определены. Простейшим ее вариантом является линейная аппроксимация функции f(t,y).

Т.к. мы знаем f_{i-1} и f_i, то на промежутке от t_i до t_{i+1} можем экстраполировать функцию f(t,y(t)) отрезком прямой линии. Тем самым, вместо настоящей нелинейной функции f(t,y) на промежутке от t_i до t_{i+1} мы подставим линейную функцию. Подстановка такой экстраполяции в (42) даст:

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [f_i \cdot (t - t_{i-1}) - f_{i-1} \cdot (t - t_i)] dt \quad . \qquad (43)$$

Для получения практической формулы перегруппируем слагаемые под знаком интеграла. Соберем слагаемые, имеющие множитель t, а также остаточный член ($f_{i-1}t_i + f_i t_{i-1}$):

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} [(f_i - f_{i-1}) \cdot t + (f_i \cdot t_{i-1} + f_{i-1} \cdot t_i)] dt \quad . \qquad (44)$$

Далее несложно переписать этот интеграл, перейдя к пределам от 0 до h, т.е. сместив переменную интегрирования в значение t_i, и расчитать аналитически, поскольку интегралом от линейной функции является квадратичная функция t. В результате мы получим формулу *двухшагового алгоритма Адамса-Бэшфорта*:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3\ f_i - f_{i-1}) \quad . \qquad (45)$$

Оценка погрешности каждого шага метода Адамса-Бэшфорта составляет $o(h^3)$. Таким образом, суммарная погрешность интегрирования уравнения на всем интервале 0...1 окажется равной $o(h^2)$.

Самое важное замечание следует сделать при практическом использовании метода Адамса-Бэшфорта. При линейной экстраполяции мы (для пересчета y_{i+1}) должны использовать две точки: y_i и y_{i-1}. Но для того, чтобы запустить алгоритм, нам также следует иметь две эти точки, однако, при решении задачи Коши, мы располагаем только одним начальным условием y_0. Таким образом, мы можем эффективно запустить этот метод только с y_2, зная y_0 и y_1, но при этом значение y_1 должно быть задано из каких-либо дополнительных соображений.

Во-первых, можно посчитать y_1 по простой формуле Эйлера. В этом случае точность будет немного хуже, но это коснется только одного шага интегрирования. Во-вторых, можно использовать неявный метод или алгоритм типа «предиктор-корректор» на первом шаге. В этом случае нам, конечно, придется численно решить нелинейное уравнение, но это надо будет сделать лишь один раз, поскольку затем мы уже сможем использовать в полной мере формулу Адамса-Бэшфорта. В-третьих, можно применить для первого шага алгоритм Рунге-Кутты, о котором речь пойдет ниже (см. §7).

Подчеркнем, что выведенный нами алгоритм Адамса-Бэшфорта (42) является двухшаговым. Для линейной экстраполяции функции f_{i+1} следует знать лишь два значения: f_{i-1} и f_i. Естественным усложнением, которое даст соответствующее повышение точности, будет построение более сложной экстраполяции, использующей и предыдущие точки, например, не линейной, а параболической.

Не будем выводить формулу многошагового метода Адамса-Бэшфорта, большего двух, а приведем лишь окончательное ее выражение. Например, для *четырехшагового* метода Адамса-Бэшфорта мы имеем следующую формулу пересчета y_{i+1}:

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{24}\cdot(55f_i-59f_{i-1}+37f_{i-2}-9f_{i-3})+o(h^4) \quad . \qquad (46)$$

В этом случае, как Вы видите, используется значение в четырех точках f_i, f_{i-1}, f_{i-2}, f_{i-3}, предваряющих точку y_{i+1}. Естественно, для запуска четырехшагового метода Адамса-Бэшфорта следует задать уже *четыре* начальные точки f_0, f_1, f_2, f_3. Сделать это можно, пользуясь теми же соображениями, что были перечислены при выводе двухшагового метода Адамса-Бэшфорта.

Завершим параграф примером решения того же логистического уравнения (33) по схемам (45) и (46) (рис. 21).

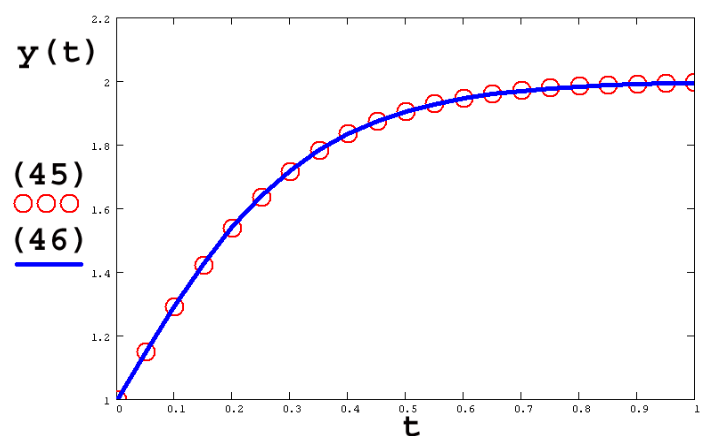

Рис. 21. *Решение (33) по схемам (45-46) Адамса-Бэшфорта (кривая – точки соответственно)*