§8. Квазирешение

Упрощенным способом регуляризации некорректных обратных задач является концепция поиска их *квазирешения*. Рассмотрим обратную задачу (40), напомнив, что она может быть как линейной, так и нелинейной, т.е. оператор **A** может описывать сложную зависимость, возможно, заданную алгоритмически.

Основная идея поиска квазирешения состоит в параметризации неизвестного вектора **y** на основе физических соображений постановки задачи. Привлекая имеющуюся априорную информацию, следует заранее задать модельный вид $\mathbf{y} \sim \mathbf{y}^0$, зависящий от ряда параметров $r^1, r^2, \ldots$, сокращенно, вектора **r**. В результате, пространство поиска решений значительно сужается – вместо отыскания всех компонент вектора **y** требуется найти лишь вектор **r**, т.е. значения модельных параметров, которых гораздо меньше.

Таким образом, квазирешение $\mathbf{y}^0$ находится из решения задачи на минимум:

$$\mathbf{r} = \arg\min\{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{y}^0(\mathbf{r}) - \mathbf{b}|\}, \tag{46}$$

где минимизация проводится по s-компонентному вектору параметров модельной зависимости $\mathbf{y}^0(\mathbf{r})$. Следует подчеркнуть, что задача поиска квазирешения является задачей на глобальный экстремум, что важно с позиций выбора вычислительного метода. Как уже отмечалось, для глобальной минимизации наиболее популярны градиентные методы поиска экстремума в комбинации со сканированием.

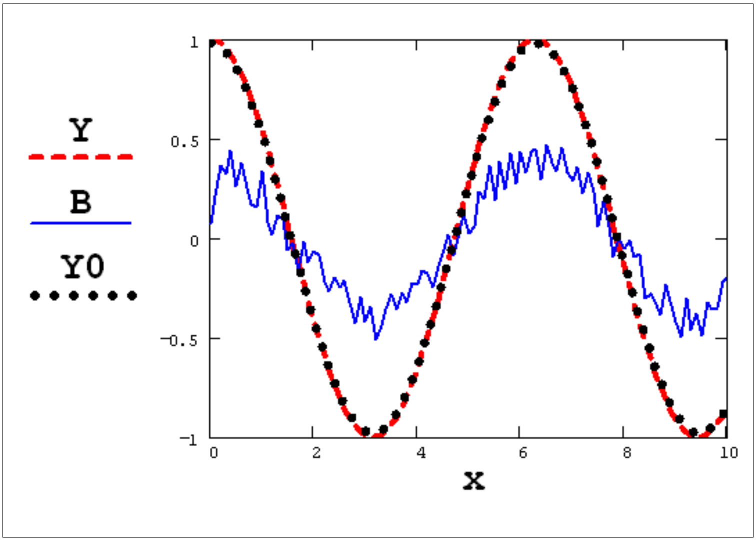

Рис. 33. *Модельный сигнал* ***Y****, измерения* ***B*** *и квазирешение* ***Y0***

Пример отыскания квазирешения обсуждавшейся в предыдущих разделах задачи приведен на рис. 33. Понятно, что при сведении некорректной задачи к проблеме отыскания квазирешения решающее значение принадлежит правильно выбранной параметризации неизвестного вектора $\mathbf{y}^0(\mathbf{r})$.

В завершение опять остановимся на задаче томографии и покажем, как можно использовать квазирешение в этом случае. Напомним, что для решения системы уравнений томографии (40), ввиду большой размерности задачи, используются, в основном, приближённые итерационные методы. Итерационные алгоритмы решения линейных систем требуют задания начального приближения n(x,z), которое используется в качестве нулевой итерации. При этом чем лучше это начальное приближение, тем лучше будет результат реконструкции и тем меньше будут затраты компьютерного времени. Напротив, если приближение выбрано неудачно, результат реконструкции может оказаться плачевным.

Для задания начального приближения применяется априорная информация. Чаще всего берут некоторый регулярный профиль $n^0(z)$, т.е. для нулевой итерации задают распределение, изотропное по горизонтальной координате (рис. 34).

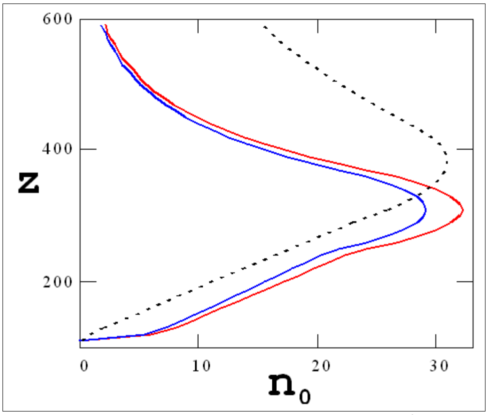

Рис. 34. *Модельная зависимость* $\mathbf{n^0}(z, \mathbf{r})$ *при разных параметрах* $\mathbf{r}$

Упомянутый профиль выбирается либо на основании прогноза, либо данных альтернативных измерений. Одним из способов его выбора как раз может служить квазирешение.

Для того, чтобы определить $n^0(z)$, решим систему (40) в предположении независимости решения от горизонтальной координаты, т.е. осуществим редукцию исходной двумерной задачи (27) к одномерной:

$$\Phi_k = A_{k,i,j} n^{i,j} \rightarrow \Phi_k = A_{k,j} n^j \quad , \tag{47}$$

в которой неизвестных гораздо меньше, чем уравнений и где

$$A_K^J \equiv \frac{1}{M_I} \sum_I A_K^{I,J} \, . \tag{48}$$

Квазирешение системы (47) найдется из решения задачи на минимум

$$\mathbf{r} = \arg\min\{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{n^0}(\mathbf{r}) - \mathbf{\Phi}|\}, \tag{49}$$

где минимизация проводится по нескольким переменным – набору параметров модельной зависимости $n^0(z,\mathbf{r})$. Таким образом, решив задачу на минимум нелинейной функции всего нескольких переменных, мы получим неплохое начальное приближение для запуска итерационного алгоритма решения СЛАУ томографии.