§1. О постановке задач

Обратные задачи наиболее типичны для экспериментальной физики. Рассмотрим их типичную постановку на примере так называемой *инструментальной задачи*. Пусть имеется некоторый сигнал N(x), который подвергается измерению на приборе **A**. Физику-исследователю доступно измерение данного сигнала, которое находится на выходе прибора (дисплее, табло или т.п.). Обозначим это измерение f(x). Поскольку прибор вносит в сигнал, во-первых, искажения (например, в приборах типа спектрометров часто измеряются некоторые интегральные характеристики сигнала) и, во-вторых, шумовую компоненту, измерения f(x) могут довольно сильно отличаться от исходного сигнала N(x) (рис. 1). В этой связи весьма актуальна задача восстановления сигнала N(x) по показаниям прибора f(x) при наличии определенной дополнительной информации о физике измерения, т.е. об операторе, описывающем действие прибора.

Таким образом, в отличие от прямой задачи:
$N(x)\rightarrow f(x)$, (1)

выражающейся равенством

$f(x)=\mathbf{A}\{N(x)\}$, (2)

где **A** – некоторый оператор, в котором заключены сведения о модели измерений, обратной задачей является восстановление

$N(x)\leftarrow f(x)$. (3)

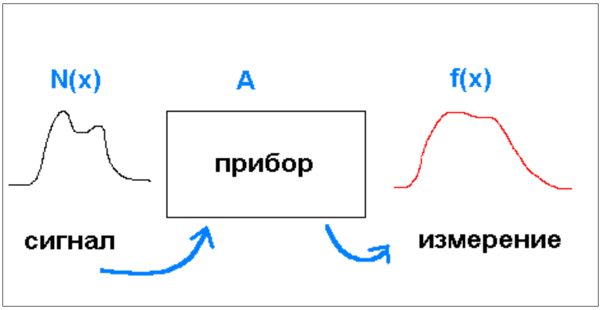

Рис. 1. *Инструментальная задача*

Отметим, что сигнал (и, соответственно, его измерение) может зависеть от времени и / или пространственных координат. Эту зависимость мы обозначили как зависимость от переменной x. Вообще говоря, **A**[N] – это некоторый функционал (т. е. функция от функции), а f(x) – некоторая известная функция, представляющая показания прибора.

При использовании численных методов непрерывные зависимости x дискретизируются, заменяясь соответствующими векторами. Таким образом, на практике задача (3) может быть записана в векторном виде

A·N= **f**, (4)

где вектор **N** неизвестен, а оператор (в линейном случае, матрица) **A** и вектор правых частей уравнений **f** известны. Далее мы будем иметь дело почти всегда именно с этим неизвестным вектором, поэтому переобозначим его более привычным для восприятия символом **y**, а вектор известных правых частей – символом **b**:

Ay= **b**. (4+)

Математический смысл дискретной формы записи (4+) обратной задачи остается прежним и состоит в отыскании неизвестного вектора сигнала **y** по измерениям прибора – вектору **b**.

Напомним, что прибор вносит в сигнал шумовую компоненту, которая в большинстве случаев может быть учтена аддитивно:

Ay+**σ**= **b**. (5)

Если оператор **A** не зависит от неизвестного вектора **y**, то **y** входит в модель (5) линейным образом (в первой степени). В связи с этим рассматриваемая задача является линейной, а саму модель называют часто *линейной схемой измерений*. Линейность модели проявляется также в том, что ее дискретная форма (5) записывается в виде матричного соотношения. Иными словами, оператор **A** представим в виде матрицы, а задача (5) является системой линейных алгебраических уравнений (далее СЛАУ).

Пример: сигнал – шум (прямая задача)

Покажем на простом примере, что, согласно модели (5), измерения b(x) могут довольно сильно отличаться от исходного сигнала y(x). Выберем следующий вид оператора **A**:

$$Ay = \int_0^a \exp(-k \cdot (x - x')^2) \cdot y(x - x')dx' \quad . \tag{6}$$

Для имитации шума возьмем генератор псевдослучайных чисел, например, с равномерным распределением и нулевым математическим ожиданием. Важно отметить, что использованная структура оператора – интегральная зависимость от сигнала y(x) в сумме с шумовой компонентой – наиболее типична для инструментальных обратных задач.

Очень полезно «поиграть» с параметрами задачи k и σ (эффективной шириной спектральной характеристики прибора и интенсивностью шума соответственно), чтобы «почувствовать» специфику модели измерений. Несколько примеров расчетов прямой задачи **b**(**y**), согласно формулам (5) и (6), приведено на рис. 2-3 в виде графиков исходного сигнала y(x) и показаний прибора b(x).

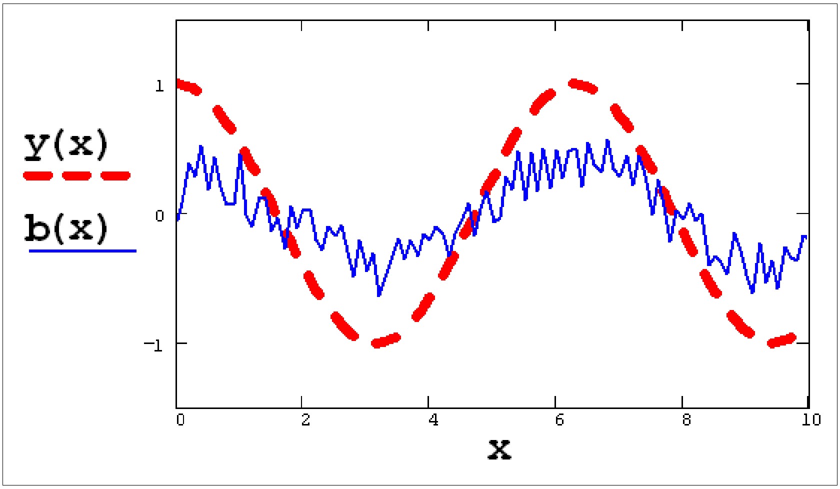

Рис. 2. *Исходный сигнал и показания прибора (k=20, σ=0.5)*

Модель измерений, представленная (6), описывает, с математической точки зрения, типичное *интегральное уравнение*, в которое неизвестная функция y(x) входит в виде части подынтегральной функции. Класс обратных задач чаще всего (но не всегда) соответствует как раз интегральным уравнениям.

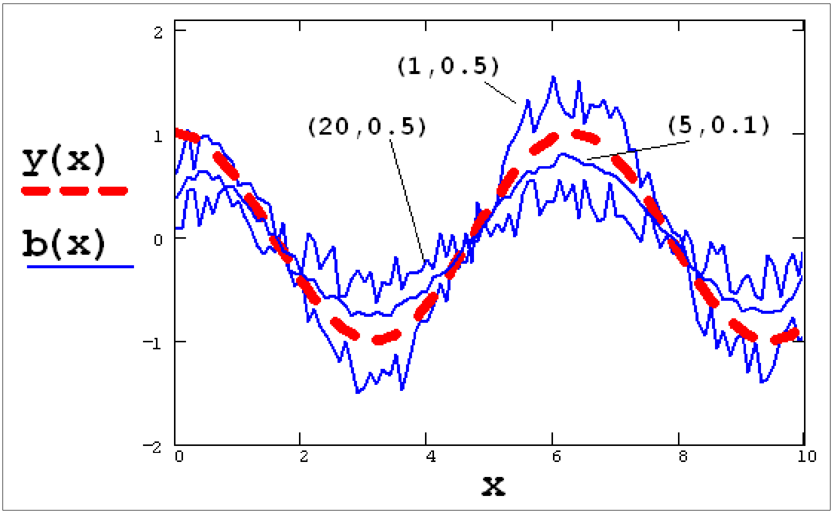

Рис. 3. *Расчеты показаний прибора для различных сочетаний k и σ*

Важно подчеркнуть, что уравнение (6) – *линейное* относительно неизвестной функции y(x). Если записать его дискретный аналог, то окажется, что он имеет форму (5): неизвестная функция y(x) станет вектором **y**, а оператор **A** – матрицей **A**. (О том, как осуществляется дискретизация, будет подробно рассказано в следующем параграфе, посвященном томографии).