§9. Фрактальный анализ

Как ни странно, многим физическим объектам присуща не целочисленная, а дробная размерность, за что они называются фракталами (от английского слова FRACTionAL – дробный). К фракталам можно отнести некоторые реки, контуры побережья, путь, проходимый броуновской частицей и т. д. Классическим примером фрактала из области геофизики является береговая линия островов.

Примером аналитического задания фрактала является функция Вейерштрасса:

$$W(a,b,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cdot \cos(b^n \cdot \pi \cdot x) \quad . \tag{45}$$

По мере уменьшения масштаба видно, что профиль этой функции не стремится к какой-то определенной кривой, а повторяет сам себя (рис. 84). Таким образом, функция Вейерштрасса – пример функции, которая является всюду непрерывной, но не имеет производной ни в одной точке.

При измерении длины побережья L (по географической карте определенного масштаба) сложная изрезанная береговая линия заменяется ломаной, состоящей из звеньев длиной не менее ε. Для обычных гладких кривых, с уменьшением ε, измерения L(ε) стремятся к некоторому значению, которое и является длиной этой кривой. Однако для береговой линии оказывается, что L зависит от ε (в интервале масштабов от 10 до 1000 км) по степенному закону.

При попытке измерения длины, как кривой, задаваемой функцией Вейерштрасса, так и береговой линии, пользуясь различными линейками с характерным масштабом ε, мы получим разные значения L, ни одно из которых нельзя рассматривать как характеристику объекта. Поэтому длина фрактальной кривой не является ее адекватной характеристикой; при уменьшении ε она стремится к бесконечности.

С другой стороны, площадь кривой Вейерштрасса или береговой линии равна нулю. В связи с этим логично предположить, что их размерность равна нецелому числу, лежащему между 1 и 2. Интерпретировать это утверждение можно, определяя описанные фракталы как «толстые линии».

Вообще говоря, параметры длины, площади, объема неразрывно связаны с понятием размерности. Для отрезка прямой размерность d=1, для плоской фигуры d=2, для трехмерного тела d=3 и т. д. Если применять к какому-либо объекту понятие, связанное с другой размерностью, ответ также будет неудовлетворительным. Например, для плоской фигуры (круга) в трехмерном пространстве объем равен нулю, длина бесконечна, а площадь конечна и не равна нулю.

Для фракталов реализуется аналогичная ситуация, но, поскольку между 1 и 2 нет промежуточных целых значений, размерность фрактальной кривой должна быть дробной.

Вообще говоря, *фрактальная размерность* D_F произвольного множества G в N-мерном пространстве определяется следующим образом:

$$D_F = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \qquad (46)$$

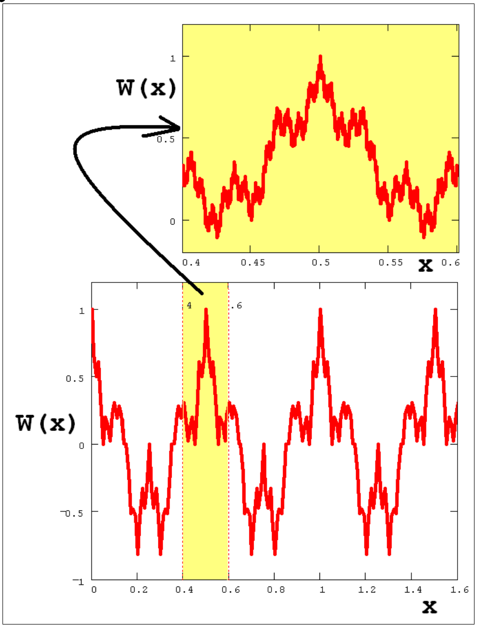

Рис. 84. *Функция Вейерштрасса*

где M(ε) - минимальное число N-мерных кубиков со стороной ε, необходимых для покрытия всех элементов множества G. Применив это определение для вычисления размерности точки, линии и поверхности, легко убедиться в привычных значениях 0, 1 и 2 соответственно. А вот для нетривиальных множеств G размерность D_F может оказаться дробной.

Численно фрактальную размерность данных можно оценить с помощью алгоритма, называемого *реконструкцией аттрактора*. Его основная идея состоит в следующем. Измерения некоторой характеристики объекта в единственной точке пространства представляются в виде дискретного множества. Интервал дискретизации выбирается порядка временного радиуса корреляции измерений. Из элементов множества последовательно формируются наборы N–мерных векторов, для различных натуральных чисел N (от 1 и выше), называемых *параметрами вложения*. Затем для каждого набора векторов определяется т.н. *корреляционный показатель*. Если всего векторов M, то он равен

$$\nu = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(k(\varepsilon) \cdot M^{-2}\right)}{\ln \varepsilon}, \qquad (47)$$

где $k(\varepsilon)$ – число всех расстояний между точками в N–мерном пространстве, которые меньше ε. Если зависимость корреляционного показателя от параметра вложения $\nu(N)$ стремится с ростом N к константе, то эта константа и будет оценкой размерности исследуемого объекта.

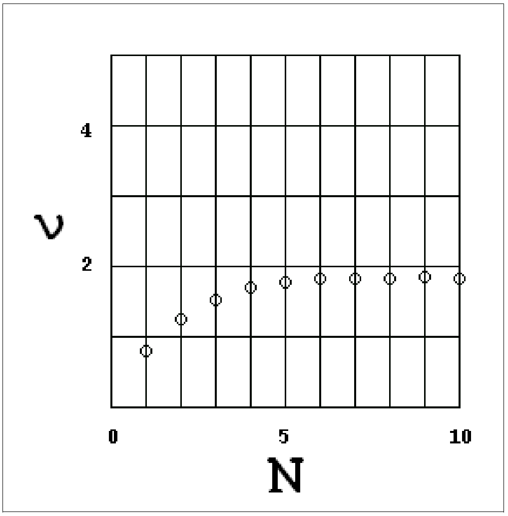

Рис. 85. *К определению фрактальной размерности странного аттрактора*

Приведем пример работы алгоритма реконструкции аттрактора сначала для модельных кривых (рис. 85), а затем для геофизического эксперимента, применительно к упомянутым в §8 данным дистанционного радиозондирования верхней атмосферы Земли (рис. 86).

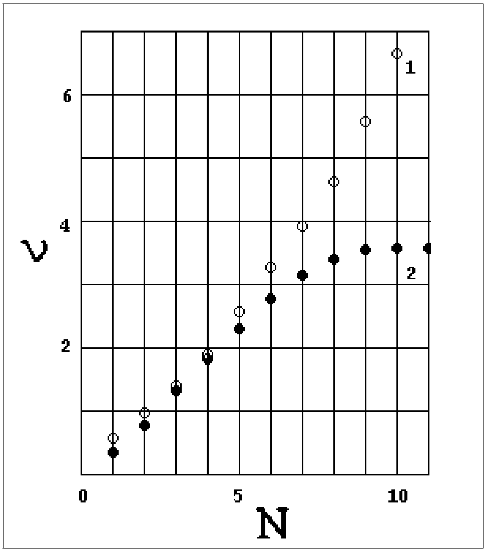

Рис. 86. *К определению фрактальной размерности экспериментальных данных*

На рис. 85 изображена зависимость ν(N) для решения системы ОДУ Лоренца в форме странного аттрактора (см. §4.8). Видно, что его фрактальная размерность составляет величину между 1 и 2.

Два типичных вида зависимости ν(N), рассчитанной для двух сеансов экспериментальных данных, приведены на рис.86. Согласно измерениям, в первом случае наблюдается монотонное возрастание корреляционного показателя с ростом N, характерное для бесконечной размерности, т.е. для чисто случайного процесса. На самом деле, в этом случае можно с уверенностью говорить, что размерность больше некоторого максимально измеренного значения корреляционного показателя (на рис. 86 – больше 6). В данном случае произвести расчёт для больших N было невозможно, т.к. объём исходной выборки данных был лимитирован.

Вторая серия измерений на рис. 86 даёт оценку размерности порядка 4. Это означает, что рассматриваемый радиосигнал в ряде случаев представляет собой не развитый, а достаточно маломодовый хаос, что указывает на принципиальную возможность описания процессов его формирования с помощью небольшого числа обычных дифференциальных уравнений.

Оценить фрактальную размерность можно и по характеристикам вейвлет–спектра. Для этого строится зависимость логарифма числа экстремумов $\ln(K_i)$ вейвлет-спектра $W(a_i,b)$ при последовательно взятых фиксированных a_i от $\ln(a^i)$. В качестве примера мы используем экспериментальные данные и их вейвлет-спектр, относящиеся к крупномасштабным возмущениям, которые были приведены на рис. 83.

Зависимость $\ln K_i(\ln a^i)$показана на рис. 87. Тангенс угла наклона даёт оценку размерности. Из рисунка видно, что она составляет порядка 1, т.е. данные крупномасштабные возмущения имеют волновую, а не фрактальную, природу.

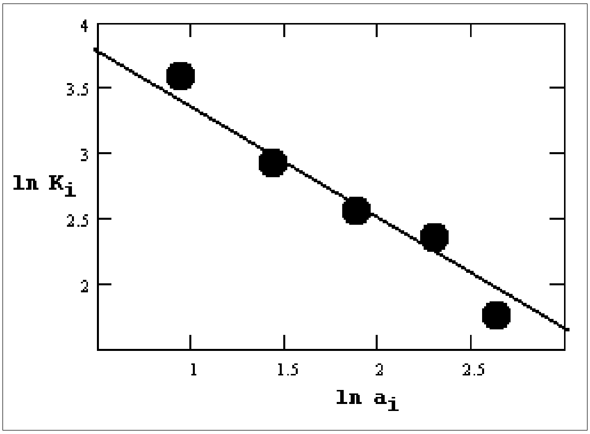

Рис. 87. *К вычислению фрактальной размерности*