Пример: Фурье-спектр модели «сигнал - шум»

Пока мы использовали в качестве примера детерминированный сигнал, представляющий собой сумму трех синусоид. Несмотря на единство термина «дискретное преобразование Фурье», прикладное применение спектрального анализа можно довольно четко разделить на две категории.

- Сигнал, подвергающийся спектральному анализу, получен в условиях пренебрежимо малой погрешности, т. е. его можно, фактически, считать детерминированным. Такая ситуация характерна для экспериментальной оптики и (разного рода) спектроскопии. В этом случае для большинства задач анализа сигналов бывает вполне достаточно использовать простые спектры Фурье, рассмотренные выше.
- Сигнал, полученный в присутствии значительной шумовой компоненты, которая существенно искажает его структуру. В этом случае следует говорить о смеси (к счастью, чаще всего аддитивной) «полезный сигнал + шум», причем в большинстве случаев заранее известна некоторая информация о статистике шумовой компоненты. Данная ситуация очень часто встречается в экспериментальной геофизике и статистической радиотехнике. В этом случае подходить к интерпретации спектров следует с вероятностной точки зрения. Как раз этому вопросу мы и посвятим данный пример.

Внесем минимальное добавление в рассматриваемый сигнал (32), добавив к нему еще одно (четвертое) слагаемое, а именно: псевдослучайную величину σ (например, с равномерным законом распределения):

$$y(x)=1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 0.05\cdot x)+0.5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 0.1\cdot x)+0.1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot 0.5\cdot x)+\sigma. \quad (37)$$

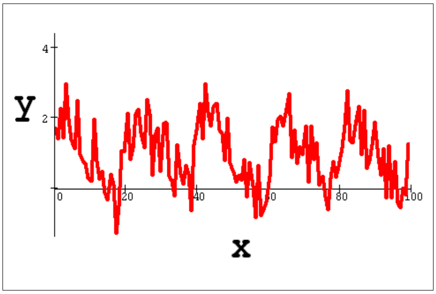

Рис. 67. *Модельные данные типа «сигнал – шум»*

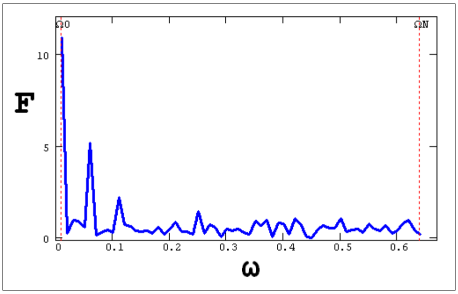

Рис. 68. *Выборочный Фурье-спектр для модели «сигнал – шум»*

Пример полученного сигнала изображен на рис. 67, а расчет его Фурье-спектра (в соответствии с алгоритмом БПФ) – на рис. 68. Как несложно заключить, сравнивая рис. 61 и 68, присутствие шумовой компоненты может значительно искажать спектр сигнала и затруднять его интерпретацию.

Отметим, что максимальное значение спектра на левом крае частотного интервала является ни чем иным, как проявлением искажающего влияния конечности выборки и сдвига ноль-линии, произошедшим из-за внесения шума σ. Математическое ожидание шума в расчетах рис. 67 мы взяли ненулевым (точнее, равным 0.5), что и обусловило соответствующий регулярный сдвиг ноль-линии вверх (в среднем, примерно на величину 0.5).

Пример: Спектр мощности («сигнал – шум»)

В силу стохастичности исходных данных, представляющих сумму полезного сигнала и шума, сами вычисленные значения спектра Фурье носят также случайный характер. В этой связи необходимо знать, с какой погрешностью они рассчитываются. Однако из курса математической статистики известно, что для обычного Фурье-преобразования случайного сигнала (в частности, нормального) не существует оценок для погрешности. Это слабое место Фурье-спектров делает их практически неприменимыми при обработке эксперимента. Вместо них надо применять так называемые *спектры мощности* (или, по-другому, *энергетические спектры*), для которых указанные оценки существуют.

Не углубляясь в теорию математической статистики, приведем пример вычисления спектра мощности сигнала, изображенного на рис. 67, основанный на его определении. Как известно, спектром мощности сигнала называют Фурье-преобразование его корреляционной функции. Таким образом, алгоритм расчета спектра мощности сводится к следующему:

- во-первых, вычислению автокорреляционной функции (рис. 69);
- во-вторых, ее прореживанию и (или) сглаживанию (в целях уменьшения влияния конечности выборки);
- в-третьих, расчету Фурье-преобразования сглаженной автокорреляционной функции.

Результат вычисления спектра мощности в соответствии с приведенным алгоритмом показан на рис. 70.

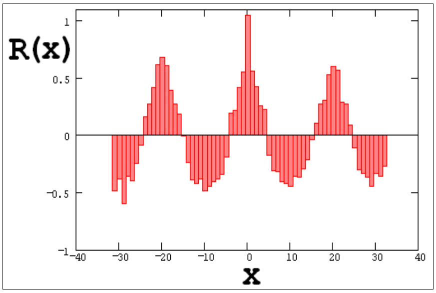

Рис. 69. *Автокорреляционная функция (модель «сигнал / шум»)*

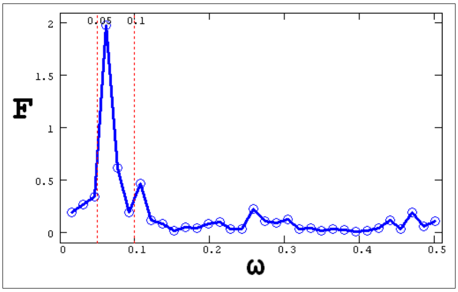

Рис. 70. *Выборочный спектр мощности (модель «сигнал / шум»)*

Отметим, что аналогичным образом, через Фурье-преобразование взаимной корреляционной функции, определяются *взаимные спектры мощности* двух выборок.